PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 9. 1. Mai 1911. Redaktionsschluß für No. 10 am 6. Mai 1911. 12. Jahrgang.

Originalmitteilungen:

W. H. Julius, Selektive Absorption und anomale Zerstreuung (Diffusion) des Lichtes in ausgedehnten Gasmassen. S. 329.

J. R. Wright, Das positive Potential des Aluminiums als eine Funktion der Wellenlänge des einfallenden Lichtes. S. 338.

INHALT:

J. Zenneck, Energiemessung an Hochspannungslichtbögen. S. 343.

V. Fréedericksz, Einige Zahlen zu der neuen von Herrn Bernoulli aufgestellten Beziehung zwischen den optischen Konstanten und dem Eigenpotential der Metalle. S. 346.

H. Witte, Über den behaupteten inversen Kräftezusammenhang zwischen Elektro- und Hydrodynamik. S. 347.

F. Krüger, Über die Anwendung der Thermodynamik auf die Elektronentheorie der Thermoelektrizität. II. S. 360.

Tagesereignisse. S. 368.

Personalien. S. 368.

Gesuche. S. 368.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Selektive Absorption und anomale Zerstreuung (Diffusion) des Lichtes in ausgedehnten Gasmassen.

Von W. H. Julius.

§ 1. Resonanz und Dämpfung. — Man erklärt die Lichtzerstreuung durch die Annahme, daß in den Molekülen des Mediums Elektronen vorhanden sind, die durch quasi-elastische Kräfte in ihrer Gleichgewichtslage gehalten werden. Solche Elektronen besitzen eine eigene Schwingungsperiode T; ihre Bewegung wird durch Resonanz verstärkt, wenn das einfallende Lichtbündel Wellen von derselben Periode enthält. Da das Licht des sichtbaren Spektrums 500 Billionen Impulse in der Sekunde an ein Elektron in Resonanz abgibt, so ist es begreiflich, daß das Elektron bereits in äußerst kurzer Zeit eine große Amplitude erlangen kann, selbst wenn die Impulse nur schwach sind.

Wellen von einer etwas abweichenden Periode T' bringen die Elektronen auch zum Schwingen; sie drücken ihnen die Periode T' auf, doch ist die Amplitude der aufgedrückten Schwingungen um so kleiner, je größer $+(T-T')$ ist. Es scheint jedoch, als ob wir bei der Erklärung von Erscheinungen, die das Spektrum von Gasen betreffen, damit kaum zu rechnen brauchten. Helmholtz hat nämlich ganz allgemein die Abhängigkeit der Intensität erzwungener Schwingungen von der Periodendifferenz $(T-T')$ und von der Dämpfung der Eigenschwingungen untersucht[1]). Ist die Dämpfung klein, dann tritt ein merkliches Mitschwingen nur dann auf, wenn T' sehr wenig von T verschieden ist. Wenden wir seine Formel auf schwingende Elektronen an, deren Bewegung, wie Interferenzerscheinungen bei großen Gangunterschieden zeigen, so wenig gedämpft ist, daß nach 300 000 Schwingungen die Intensität sicher nicht unter $^1/_{10}$ gesunken ist, dann finden wir, daß die Energie der erzwungenen Schwingungen von der Periode T' bereits kleiner ist als $^1/_{10}$ der Energie der Resonanzschwingungen von der Periode T, wenn zwischen den zwei entsprechenden Wellenlängen ein Unterschied von nur 0,01 Å. besteht. Der Bereich von deutlich wahrnehmbarem Mitschwingen erstreckt sich demnach nicht weiter, als über ein paar Hundertstel Å.

Bei einem Elektron in Resonanz kann natürlich die Amplitude nicht unbegrenzt zunehmen, und zweifellos wird die quasi-elastische Kraft bei sehr großem Ausschlage nicht mehr proportional dazu sein. Überschreitet die Amplitude eine gewisse Grenze, dann löst sich das Elektron aus dem molekularen Verbande und bewegt sich selbständig fort: die Bestrahlung hat zur Ionisation geführt. Lichtabsorption ist aber nicht immer mit Ionisation verbunden; die obengenannte Grenze wird offenbar in den meisten Fällen nicht überschritten; es muß also eine Ursache bestehen, wodurch der Amplituden-Vergrößerung Einhalt getan wird. Formell bringt man solch eine Ursache in Rechnung durch Einführung eines Widerstandes, der sich der Bewegung des Elektrons widersetzt und seiner Geschwindigkeit proportional gesetzt wird. Die Bewegungsgleichungen eines Elektrons, das unter dem Einfluß einer (periodischen) elektrischen Feldstärke $(X\,Y\,Z)$ steht, haben daher folgende Gestalt:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+h\frac{dx}{dt}+kx=eX \text{ usw.} \qquad (1)$$

worin m die Masse, e die Ladung des Elektrons bedeutet, während k die Größe der quasi-

1) Helmholtz, Die Lehre von den Tonempfindungen, 1877, S. 233 und 642.

elastischen Kraft, h die Größe des Widerstandes bestimmt.

Wir setzen uns die Aufgabe, das Wesen des Dämpfungsfaktors h näher zu studieren und zu untersuchen, welchen Einfluß die Dämpfungsursachen auf die Intensität des Lichtes haben, das sich durch gasförmige Medien von großer Ausdehnung, wie z. B. die Atmosphären von Sonne und Sternen, fortpflanzt.

§ 2. Hinweis auf einige Ergebnisse der Dispersionstheorie. — Man weiß, daß die Dispersionstheorie die Frage beantwortet, wie eine gegebene periodische elektrische Kraft in einem Medium fortgepflanzt wird, in welchem sich eine große Anzahl von Elektronen befindet, deren Bewegung sich durch Gleichungen von der angegebenen Form darstellen läßt[1]).

Enthält das Medium pro cm³ $\mathfrak{N}$ gleichartige Moleküle, jedes versehen mit einigen verschiedenartig gebundenen Elektronen, so daß eine beschränkte Anzahl von Eigenperioden vorhanden ist, dann hat man nur die allgemeinen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes auf das beladene Medium anzuwenden, und findet als Lösung — in den für unseren Zweck geeigneten Bezeichnungen von W. Voigt[2]) — die folgende Formel:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{n}^2 = n^2(1 - i\varkappa)^2 &= 1 + \Sigma \frac{4\pi\,\mathfrak{N}\,\dfrac{e^2}{m}}{\dfrac{k}{m} + i\,\dfrac{h}{m}\nu - \nu^2} \\ &= 1 + \Sigma \frac{\varrho}{\nu_\sigma^2 + i\,\nu'\nu - \nu^2}. \end{aligned}\right| \quad (2)$$

Darin bedeutet $\mathfrak{n}$ den komplexen, n den reellen Brechungsindex, $\varkappa$ den Dämpfungskoeffizienten, ν die Schwingungszahl der betrachteten Lichtart in der Zeit 2π. Die Bedeutung von ϱ, ν_σ und ν' erkennt man aus der Formel. Daß $\sqrt{\frac{k}{m}} = \nu_\sigma$ die Frequenz der Eigenschwingung eines Elektrons bei Abwesenheit von Dämpfung und von wechselnder Feldstärke ist, zeigt sich, wenn man in Gl. (1) $h = 0$ und $X = 0$ setzt. Jede Elektronengattung liefert ein Glied in der Summe.

1) Die Bewegungsgleichungen des Elektrons, die Lorentz als Ausgangspunkt nimmt (The theory of electrons, S. 139) enthalten zwei Glieder mehr und sind dadurch allgemeiner als Gl. (1). Bei dem Probleme, das uns beschäftigt, können wir jene zwei Glieder weglassen, da wir 1. kein äußeres Magnetfeld zu beachten haben und 2. die Ergebnisse nur auf Zwischenstoffe von geringer Dichte anwenden wollen.

2) W. Voigt, Magneto- und Elektro-Optik, 1908, S. 107.

Eine Scheidung der reellen Glieder von den imaginären in Gl. (2) führt zu den Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} n^2(1 - \varkappa^2) &= 1 + \Sigma \frac{\varrho\,(\nu_\sigma^2 - \nu^2)}{(\nu_\sigma^2 - \nu^2)^2 + \nu'^2\nu^2} \\ 2\,n^2\varkappa &= \Sigma \frac{\varrho\,\nu'\nu}{(\nu_\sigma^2 - \nu^2)^2 + \nu'^2\nu^2}, \end{aligned}\right| \quad (3)$$

woraus n und $\varkappa$ zu berechnen sind. Dieses Problem wird viel einfacher und kaum minder allgemein, wenn wir die Aufmerksamkeit jedesmal auf die Umgebung einer der Eigenfrequenzen ν_σ beschränken. Wir setzen dann in Gl. (2) das Glied, das sich auf das gewählte ν_σ bezieht, heraus und deuten die übrigen Glieder der Summe durch einen wechselnden Index h an:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{n}^2 = 1 &+ \Sigma \frac{\varrho_h}{\nu_h^2 + i\,\nu'_h\nu - \nu^2} \\ &+ \frac{\varrho}{\nu_\sigma^2 + i\,\nu'\nu - \nu^2}. \end{aligned}\right| \quad (4$$

Da wir nur Werte von ν betrachten, die nahe bei ν_σ gelegen sind, kann unter dem Summenzeichen ν_σ für ν geschrieben werden und das Glied $i\,\nu'_h\,\nu_\sigma$ kann gegenüber $\nu_h^2 - \nu_\sigma^2$ vernachlässigt werden. Schreiben wir noch $\nu - \nu_\sigma = \mu$, also $\nu^2 - \nu_\sigma^2 = 2\,\nu_\sigma\mu$, dann geht (4) über in

$$\mathfrak{n}^2 = 1 + \Sigma \frac{\varrho_h}{\nu_h^2 - \nu_\sigma^2} - \frac{\varrho}{\nu_\sigma(2\,\mu - i\,\nu')}$$

oder

$$\mathfrak{n}^2 = n_\sigma^2 - \frac{\varrho}{\nu_\sigma(2\,\mu - i\,\nu')}, \quad (5)$$

wobei n_σ den Brechungsindex darstellt, der in dem kleinen von uns betrachteten Spektralgebiete obwalten würde, falls da keine Eigenfrequenz ν_σ vorhanden wäre.

Wenn man diese vereinfachte Gleichung in den reellen und imaginären Teil spaltet und nach n und $\varkappa$ auflöst, so ist der Gang der Funktionen noch nicht sehr übersichtlich. Wir wollen daher zuerst noch den speziellen Fall betrachten, daß der Modul des komplexen zweiten Gliedes für alle Werte von μ innerhalb des betrachteten Gebietes klein ist gegen n_σ^2. Dann kann $\mathfrak{n}^2 - n_\sigma^2$ durch $2\,n_\sigma(\mathfrak{n} - n_\sigma)$ ersetzt werden und durch Trennung des reellen Teiles vom imaginären findet man

$$n = n_\sigma - \frac{\varrho\,\mu}{n_\sigma\nu_\sigma(4\,\mu^2 + \nu'^2)} \quad (6)$$

$$n\varkappa = \frac{\varrho\,\nu'}{2n_\sigma\nu_\sigma(4\,\mu^2 + \nu'^2)}, \quad (6a)$$

woraus der symmetrische Gang von n und $n\varkappa$ als Funktionen von μ leicht abzuleiten ist.

Man sieht nämlich, daß $n = n_\sigma$ wird für $\mu = 0$, daß für einen beliebigen positiven Wert von μ (also an der violetten Seite von ν_σ) n um einen gewissen Betrag kleiner ist als n_σ

während für einen ebenso großen negativen Wert von μ (also an der roten Seite) n ebensoviel größer ist als n_o. Bei $\mu = -\frac{1}{2}\nu'$ erreicht n ein Maximum:

$$n = n_o + \frac{\varrho}{4 n_o r_o \nu'},$$

bei $\mu = +\frac{1}{2}\nu'$ ein Minimum:

$$n = n_o - \frac{\varrho}{4 n_o r_o \nu'}.$$

Der Schwächungskoeffizient $n\varkappa$ hat bei $\mu = 0$ ein Maximum im Betrage von $\frac{\varrho}{2 n_o r_o \nu'}$, wird halb so groß bei $\mu = +\frac{1}{2}\nu'$, das heißt also gerade dort, wo das Maximum und das Minimum von n gefunden wurde, und nähert sich bei weiterer Zunahme von μ beiderseits der 0. Fig. 1 (entlehnt aus Voigt, l. c. S. 115)

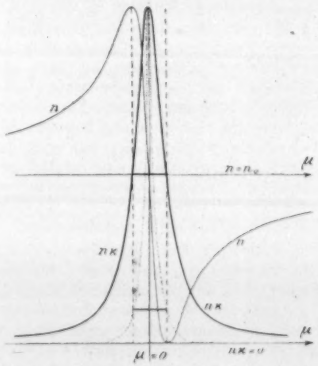

Fig. 1.

zeigt den Verlauf der zwei Funktionen. Man kann ν' als ein Maß für die Breite der dunklen Linien betrachten, die im Spektrum entstehen. Die Dunkelheit nimmt nämlich viel schneller ab als der Wert von $n\varkappa$, da die Stärke des durchgelassenen Lichtes (falls die Schicht nicht zu dick ist, siehe § 5) $I = I_o e^{-\frac{4\pi}{\lambda} n\varkappa \cdot z}$ beträgt, wenn z den im Gase zurückgelegten Weg bedeutet. Die punktierte Kurve stellt den Verlauf des reziproken Wertes der Intensität dar, wenn man voraussetzt, daß in der Mitte $I = \frac{1}{100} I_o$ ist, so daß bei $\mu = +\frac{1}{2}\nu'$, wo $n\varkappa$ halb so groß ist als in der Mitte, $I = \frac{1}{10} I_o$ wird. Beinahe die ganze dunkle Linie fällt so zwischen $\mu = -\frac{1}{2}\nu'$ und $\mu = +\frac{1}{2}\nu'$[1]).

1) Wir werden später sehen, daß in dem Licht, das die Sonnenatmosphäre durchsetzt hat, die scheinbare Breite der Absorptionslinien noch geringer sein muß, da ein Teil der Lichtschwächung auf Diffusion beruht und dieser Teil einem anderen Gesetze folgt.

§ 3. Fälle von stärkerer Anomalie der Dispersionskurve. — Da es unser Ziel ist, die Ergebnisse der Theorie auf die Erklärung des Sonnenspektrums anzuwenden und dabei vielleicht nicht immer angenommen werden darf, daß der Modul von $\frac{\varrho}{r_o(2\mu - i\nu')}$ klein ist gegenüber n_o^2 (wenn es sich z. B. um sehr starke Linien handelt, wie die Calciumlinien H und K), kehren wir zu der Gl. (5) zurück. Durch Trennung des reellen Teiles vom imaginären erhalten wir

$$n^2 - n^2\varkappa^2 - n_o^2 = \frac{-2\varrho\mu}{r_0(4\mu^2 + \nu'^2)}$$

und

$$n^2\varkappa = \frac{\frac{1}{2}\varrho\nu'}{r_o(4\mu^2 + \nu'^2)}.$$

Substitution der zweiten Gleichung in die erste ergibt:

$$n^2 - n_o^2 = \frac{-2\varrho\mu + \frac{1}{2}\varrho\nu'\varkappa}{r_o(4\mu^2 + \nu'^2)} \qquad (7)$$

oder

$$n - n_o = \frac{-\varrho\mu + \frac{1}{4}\varrho\nu'\varkappa}{\frac{1}{2}(n + n_o) r_o(4\mu^2 + \nu'^2)},$$

woraus

$$\left.\begin{aligned} n = n_o + \frac{\frac{1}{4}\varrho\nu'\varkappa}{\frac{1}{2}(n + n_o) r_o(4\mu^2 + \nu'^2)} \\ - \frac{\varrho\mu}{\frac{1}{2}(n + n_o) r_o(4\mu^2 + \nu'^2)}. \end{aligned}\right| \qquad (8)$$

Einen ähnlichen Verlauf, wie zufolge Gl. (6) n in Bezug auf n_o hat, zeigt nach Gl. (8) n in Bezug auf $n_o + \delta$, wo δ das zweite Glied vorstellt und also von n und $\varkappa$ abhängt. Durch dieses Glied δ wird jedoch der Charakter der Kurve kaum merklich verändert, da $\frac{1}{4}\nu'\varkappa$ klein ist gegen μ. Selbst innerhalb des Schwächungsgebietes ist der Einfluß von δ gering. Betrachten wir z. B. die Stelle im Spektrum, wo $\mu = \frac{1}{2}\nu'$ ist. Da wird das Verhältnis des zweiten zum dritten Gliede

$$\frac{1}{4}\nu'\varkappa : \mu = \frac{1}{4}\nu'\varkappa : \frac{1}{2}\nu' = \frac{1}{2}\varkappa.$$

Experimentelle Daten, woraus man für Calcium die Werte von $\varkappa$ berechnen könnte, sind mir nicht bekannt. Für Natriumdampf aber hat man für den maximalen Wert von $n\varkappa$ 10^{-3} gefunden[1]), so daß an der betrachteten Stelle $n\varkappa = 5 \times 10^{-4}$, also $\frac{1}{2}\varkappa = \frac{1}{n} \times 2{,}5 \times 10^{-4}$ ist. Für größere Werte von $+\mu$ nimmt das obige Verhältnis schnell ab. Man kann daher das zweite Glied in der rechten Seite von Gl. (8) vernachlässigen.

Indessen kommt in dem Nenner des dritten

1) W. Voigt, l. c. S. 142.

Gliedes der veränderliche Faktor $^1/_2(n + n_o)$ vor, wo in (6) der konstante Faktor n_o steht. Daraus folgt, daß jetzt unsere Dispersionskurve die vollkommen symmetrische Gestalt der durch Gl. (6) dargestellten, nicht aufweist. Den Charakter der Abweichung erkennt man, wenn man Gl. (7) mit Weglassung des Gliedes $^1/_2 \varrho \nu' \varkappa$ so schreibt:

$$n^2 = n_o^2 - \frac{2\varrho\mu}{\nu_o(4\mu^2 + \nu'^2)}.$$

In Bezug auf den Schnittpunkt P der horizontalen Linie n_o^2 (Fig. 2) mit der Vertikalen

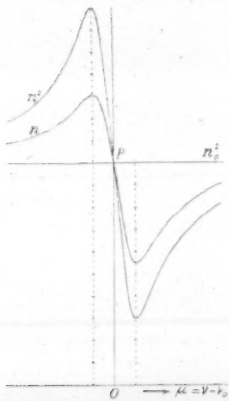

Fig. 2.

$\mu = 0$ ist die Kurve, die n^2 darstellt, symmetrisch. Nehmen wir $n_o = 1$ an, dann fällt die Linie n_o mit der Linie n_o^2 zusammen. Zeichnen wir in dieselbe Figur die Kurve ein, deren Ordinaten die Wurzeln der Ordinaten der ersten Kurve sind, so sehen wir, daß die „Anomalie" des Brechungsindex n an der violetten Seite größer ist als an der roten. Es ist die Frage, ob sich bei Gasen Fälle ergeben, wo der Unterschied groß genug ist, um wahrgenommen zu werden.

§ 4. Über die Bedeutung des Dämpfungsfaktors. — Eine stets vorhandene Ursache für Dämpfung liegt in der Tatsache, daß ein schwingendes Elektron einen Teil seiner Bewegungsenergie nach allen Seiten ausstrahlt und so durch Zerstreuung verliert. Hat es die veränderliche Geschwindigkeit v, dann erfährt es von seinem eigenen Felde eine Kraft, die in erster Annäherung seiner Beschleunigung $\frac{dv}{dt}$ proportional ist und sich daher als Trägheit äußert, doch kommt darin auch ein Glied vor, das proportional $\frac{d^2v}{dt^2}$ ist, nämlich [1]):

$$r = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{d^2v}{dt^2}.$$

Ist nun die Bewegung periodisch, $v = b\cos\nu t$, dann hat man $\frac{d^2v}{dt^2} = -\nu^2 v$, deshalb

$$r = -\frac{2}{3}\frac{\nu^2 e^2}{c^3}\frac{dx}{dt},$$

wenn x der Ausschlag zur Zeit t ist.

Dieses Glied der Kraft kann also als der Ausdruck eines Widerstandes betrachtet werden, der proportional der Geschwindigkeit und entgegengesetzt gerichtet ist. Der Zahlenwert des Koeffizienten ist klein, und daß die daraus entstehende Dämpfung in der Tat sehr gering ist, sieht man auch aus den bekannten Interferenz-Erscheinungen bei großen Gangunterschieden, die uns zeigen, daß nach 100000 Schwingungen die Amplitude eines Elektrons nur wenig abgenommen hat. Die Absorption des einfallenden Lichtes, die sich unter anderem in Temperaturerhöhung zeigt, kann aus der genannten Dämpfungsursache nicht erklärt werden. Die zerstreute Energie bleibt Strahlungsenergie von solchen Periodenzahlen, die in dem ursprünglichen Lichtbündel enthalten sind.

Zur Erklärung der eigentlichen Absorption nimmt Lorentz an, daß die Schwingungen eines Elektrons nur während einer beschränkten Zeit τ ungestört fortdauern, und daß dann, z. B. bei Zusammenstößen, seine Energie an andere Systeme übertragen wird [2]). Diese Vorstellung bringt er in der Formel zum Ausdruck, indem er für den Dämpfungsfaktor h schreibt: $\frac{2m}{\tau}$. Es ist indessen nicht nötig, unter τ die Zeit zu verstehen, die im Mittel zwischen zwei Zusammenstößen verstreicht; bereits nach einer viel kürzeren Zeit τ kann die Amplitude von einem in Resonanz (oder nahezu in Resonanz) befindlichen Elektron so groß geworden sein, daß auch die übrigen Bestandteile des Moleküls, zu dem es gehört, ihren Bewegungszustand sehr merklich verändert und einen Teil seiner Energie dauernd aufgenommen haben. In diesem Fall kann man bereits von Absorption sprechen; bei den Zusammenstößen kommt dann weiter ein

1) Lorentz, The theory of electrons, p. 49; Encyklopädie der math. Wiss. V 2, 188; Abraham, Theorie der Elektrizität II, S. 72, 123. In der obigen Formel ist e in *C. G. S.*-Einheiten ausgedrückt, die auf dem Coulombschen Gesetz beruhen.

2) Lorentz, The theory of electrons, p. 141.

Austausch zustande, der sich unter anderem als Temperaturerhöhung bemerkbar macht.

Zufolge dieser Vorstellung kommt daher Absorption von Strahlungsenergie nur dann zustande, wenn durch Resonanz gewisse Elektronen so stark in Bewegung versetzt werden, daß sie Energie auf nicht umkehrbare Weise an andere Teile des Systems, zu dem sie gehören, übertragen. Über die näheren Bedingungen dieses Prozesses kann man nur Vermutungen aussprechen. Lorentz hat gezeigt[1]), daß der dämpfende Einfluß von Zusammenstößen, angenähert durch ein Glied in der Bewegungsgleichung, das proportional mit der Geschwindigkeit des Elektrons ist, ausgedrückt werden kann. Wenn jedoch der Absorptionsprozeß innerhalb der Moleküle bereits beginnt, bevor sie von neuem zusammengestoßen sind (was Lorentz für wahrscheinlich hält, l. c., S. 142), ist es sehr wohl denkbar, daß ein gewisser Schwellenwert der Geschwindigkeit, also ein gewisser Schwellenwert der Amplitude, von dem Resonator überschritten sein muß, bevor eine bleibende Energieübertragung an andere Teile desselben Systems stattfindet[2]). Ist der Zusammenhang wirklich so, dann werden Wellen, die dem Elektron wegen mangelhafter Resonanz nur kleine mittlere Geschwindigkeiten erteilen, gar nicht absorbiert werden: der der Absorption zuzuschreibende Teil des Dämpfungsfaktors würde in einem gewissen Abstande von der Mitte der Absorptionslinie absolut Null werden. Das ist natürlich nur eine Hypothese, für die wir ohne tiefere Kenntnis von dem Bau der Moleküle keine weitere Grundlage geben können, und die nur an der Brauchbarkeit der Schlußfolgerungen geprüft werden kann.

Strahlt weißes Licht durch ein dünnes Gas, dessen freie Eigenschwingungen scharf abgegrenzt sind[3]), dann ist nach § 1 das Spektralgebiet, wo kräftiges Mitschwingen erfolgt, für jede Elektronensorte nur wenig breiter als das Gebiet der Eigenschwingungen, aber streng genommen erstreckt sich das Mitschwingen mit abnehmender Intensität unbegrenzt nach beiden Seiten von der Linie aus. Nach der Annahme gilt das letztere für die Absorption nicht; diese ist auf einen Teil des Resonanzgebietes beschränkt.

Anders ist es mit dem Anteil, den die Zerstreuung oder Diffusion an der Dämpfung hat. In dem Gebiete stärkster Absorption tritt sie in den Hintergrund, denn der Faktor $\frac{2\nu^2 e^2}{3c^3}$ beträgt z. B. für Natriumlicht ungefähr 2×10^{-20}, während für den ganzen Dämpfungsfaktor in Natriumdampf $h = m\nu' = 7 \times 10^{-28} \times 11{,}2 \times 10^{10} = 7{,}8 \times 10^{-17}$ gefunden wurde[1]). Dem gegenüber steht, daß man nicht, wie im Falle der Absorption, an der Proportionalität dieses Dämpfungseffektes mit der Geschwindigkeit zu zweifeln braucht, auch wenn diese klein wird[2]). Die Zerstreuung erstreckt sich über das ganze Spektrum, welches auch die Eigenperioden der Elektronen seien.

Unabhängig von der Absorptions- und Dispersionstheorie hat denn auch Rayleigh bewiesen, daß ein Lichtbündel von der Intensität I_o und der Wellenlänge λ die folgende Intensität besitzt, nachdem es den Weg x in einem Gase vom Brechungsindex n zurückgelegt hat, in dem $\mathfrak{N}$ zerstreuende Moleküle per cm³ vorhanden sind:

$$I = I_o e^{-\frac{32\pi^3(n-1)^2}{3\lambda^4\mathfrak{N}}x}. \qquad (9)$$

Die Größe $s = \frac{32\pi^3(n-1)^2}{3\lambda^4\mathfrak{N}}$ ist der Zerstreuungskoeffizient. Wenn Δ die Dichte des Gases ist, so kann man $\frac{n-1}{\Delta} = R$ für eine gegebene Strahlengattung als konstant annehmen. Da Δ proportional $\mathfrak{N}$ gesetzt werden kann, z. B. $\Delta = f\mathfrak{N}$, so ist auch $\frac{n-1}{\mathfrak{N}} = fR$ eine Konstante für jede bestimmte Lichtsorte. Führt man dies ein, so wird

$$s = \frac{32\pi^3\mathfrak{N}f^2R^2}{3\lambda^4} = \frac{32\pi^3\Delta fR^2}{3\lambda^4}, \qquad (10)$$

1) Lorentz, The theory of electrons, Anm. 57.

2) Diese Auffassung verträgt sich sehr gut mit der neuen Planckschen Strahlungshypothese (Verhandl. der Deutschen Physik. Gesellsch. **13**, 138), derzufolge die Aufnahme von Strahlungsenergie durch Resonanz stetig verlaufen soll, die Abgabe von Energie bei der Emission hingegen unstetig, nach Lichtquanten. — Gesetzt, ein Elektron werde wegen Unvollkommenheit der Resonanz nur bis zu einer solchen Amplitude erregt, daß es zwar selbst Lichtquanten aussenden kann, daß jedoch die durch seine Bewegung veranlaßten Eigenschwingungen der übrigen, anders gestimmten Elektronen desselben Moleküls den zur Emission erforderlichen Schwellenwert der Amplitude nicht erreichen. Dann wird ein Teil der einfallenden Strahlungsenergie durch das primär erregte Elektron zerstreut, aber es findet keine Absorption statt, keine Umwandlung der ursprünglichen Energie in solche anderer Art.

3) Vollkommen scharf ist die Abgrenzung der entsprechenden Wellenlängengebiete nicht, wegen Störungen bei Zusammenstößen und wegen dem Doppler-Effekte.

1) Aus Beobachtungen von Hallo über magnetische Drehung der Polarisationsebene im Natriumdampf berechnete Voigt $\nu' = 11{,}2 \times 10^{10}$. Siehe Voigt, l. c. S. 142.

2) Diese Aussage bedarf vielleicht einer Einschränkung im Hinblick auf die Plancksche Strahlungshypothese, insofern auch die Zerstreuung des Lichtes nur nach bestimmten Quanten erfolgt. Aber jedenfalls muß das einer Eigenfrequenz zugeordnete Spektralgebiet, wo Zerstreuung stattfindet, breiter sein, als das Gebiet der Absorption.

worin R die Refraktionskonstante des Mediums ist.

Der Zerstreuungskoeffizient ist folglich umgekehrt proportional mit der vierten Potenz der Wellenlänge, proportional mit der Dichte, mit der trägen Masse, die im Mittel pro zerstreuendes Teilchen im Medium vorhanden ist, und mit der zweiten Potenz der Refraktionskonstanten. Da diese letztere in der Nähe der Eigenperiode stark variiert, auch wenn der Dämpfungsfaktor sehr klein oder sogar $= 0$ gesetzt wird (Voigt, l. c. S. 118), so zeigt die Diffusion in diesem Gebiete des Spektrums stark voneinander abweichende und ziemlich beträchtliche Werte; sie verschwindet nur bei Wellen, die sich im Medium mit derselben Geschwindigkeit wie im freien Äther fortpflanzen, d. h. für $R = 0$ oder $n = 1$.

Die Wirkungen von Absorption und Diffusion können von zwei Gesichtspunkten aus betrachtet werden. Erstens kann man sich fragen, welchen Einfluß die beiden Dämpfungsursachen auf die Elektronenbewegung und dadurch auf die optischen Eigenschaften des Mediums (gekennzeichnet durch n und $\varkappa$) haben. Zweitens kann man, wenn das einfallende Licht bekannt ist, die Stärke und die Zusammensetzung des Lichtes beim Verlassen des absorbierenden Mediums untersuchen.

Bis hierher haben wir uns nur mit der ersten Frage beschäftigt. Wir kamen zu dem Schlusse, daß für Wellen, die zu der allernächsten Umgebung der Eigenschwingungen eines Gases gehören, der Dämpfungsfaktor h als die Summe von zwei Gliedern aufgefaßt werden kann:

$$h = \frac{2m}{\tau} + \frac{2}{3}\frac{\nu^2 e^2}{c^3}. \qquad (11)$$

Wir sahen ferner, daß im mittelsten Teile dieses engen Bereiches das erste Glied groß ist gegen das zweite, daß jedoch höchstwahrscheinlich der Wert dieses ersten Gliedes schon in kurzem Abstande von jeder der Eigenperioden bis auf 0 abnimmt, so daß in den übrigen Teilen des Spektrums nur der Einfluß des zweiten Gliedes bestehen bleibt.

Der Parameter h ist daher nicht konstant, selbst wenn wir nur einen so kleinen Teil des Spektrums betrachten, daß die Veränderlichkeit des Faktors ν^2 außer acht gelassen werden kann. Das schließt aber nicht aus, daß Fig. 1 doch den Verlauf des Brechungsindex als Funktion der Schwingungszahl in der Hauptsache richtig wiedergibt, da für alle in Frage kommenden Werte von h der Charakter der Dispersionskurve derselbe ist. So bleibt z. B. mit großer Annäherung die Beziehung gelten, daß das Maximum und das Minimum von n dort auftreten, wo $\mu = +1/2\,\nu'$ ist, wenn nämlich an diesen Stellen des Spektrums das zweite konstante Glied von h bereits vorherrscht. Hingegen muß der Abstand zwischen Maximum und Minimum größer als ν' sein, wenn an den Stellen, wo μ die Werte $+1/2\,\nu'$ passiert, die Funktion ν' (oder h) schnell zunimmt mit abnehmendem μ.

§ 5. Strahlung durch eine sehr ausgedehnte Atmosphäre. — Gehen wir nun zur Behandlung der zweiten Frage über, nämlich wie die Zusammensetzung eines Lichtbündels beim Verlassen einer sehr dicken Gasschicht, etwa der Atmosphäre eines Himmelskörpers, beschaffen ist, wenn angenommen wird, daß die Emissionskurve der ursprünglichen Lichtquelle einen kontinuierlichen Verlauf hat.

Offenbar kann die Antwort nicht dadurch gegeben werden, daß man einfach für jede Strahlengattung die Werte von $n\varkappa$, die aus den Formeln (3) oder (6a) hervorgehen, wenn darin, zufolge Gl. (11),

$$\nu' = \frac{h}{m} = \frac{2}{\tau} + \frac{2}{3}\frac{\nu^2 e^2}{c^3 m}$$

geschrieben wird, in eine Gleichung von der Form

$$I = I_0 e^{-\frac{4\pi}{\lambda} n\varkappa \cdot z} \qquad (12)$$

einsetzt (worin z den ganzen in der Gasschicht zurückgelegten Weg bedeutet). Selbst wenn die Gasmasse vollkommen homogen wäre, würde dieser Weg zu einem ganz falschen Ergebnis führen. Während der Teil der Lichtschwächung, der von der Absorption herrührt, in geometrischer Reihe fortschreitet, wenn die Schichtdicke in arithmetischer Reihe zunimmt, so gilt das für den Teil, der von der Zerstreuung abhängt, nicht. Wenn die Gasschicht sehr dick ist, muß man beachten, daß von jedem Elektron eine gewisse Menge zerstreuten Lichtes von der betrachteten Wellenlänge ausgeht, die es seiner ganzen Umgebung entnimmt, und die sich teilweise dem durchgelassenen Bündel hinzuaddiert. Die Abschwächung des Bündels muß daher langsamer gehen als nach Gl. (12), die den Intensitätsverlust durch Absorption darstellt[1]).

Schuster[2]) war der erste, der den Einfluß der Diffusion des Lichts in ausgedehnten Gasmassen mit demjenigen von Absorption und Emission ausführlich verglich. Auf Grund des

1) Rayleigh hat dies nicht berücksichtigt bei Ableitung der Gl. (9); sein Ergebnis liefert nur die Abschwächung, die das ursprüngliche Bündel durch Zerstreuung erfährt, und enthält das zerstreute Licht selbst nicht.

2) Schuster, Radiation through a foggy atmosphere. Astroph. Journ. **21**, 1, 1905.

Kirchhoffschen Gesetzes untersuchte er für verschiedene Verhältnisse von Absorptions- und Zerstreuungskoeffizient, unter welchen Umständen eine Atmosphäre von gegebener Dicke dunkle oder helle Spektrallinien liefern müßte.

Das Problem wurde folgendermaßen angefaßt: Eine Atmosphäre von der Dicke t werde von einer Oberfläche S_1S_2 (Fig. 3) bestrahlt,

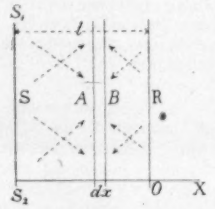

Fig. 3.

die pro cm² die Energiemenge S (dem Wellenlängenbereich zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ angehörend) nach allen Richtungen gleichmäßig verteilt aussendet. Nun beginnt Schuster mit der Berechnung der Veränderung, die der gesamte Energiestrom in einer dünnen Schicht dx in der Atmosphäre erfährt. Von links empfängt die Schicht die Menge A pro cm² (die im allgemeinen kleiner sein wird als S, obwohl sie außer den von S_1S_2 kommenden Strahlen auch noch die Eigenstrahlung von dem zwischen S_1S_2 und der Schicht dx gelegenen Teil der Atmosphäre umfaßt). Davon absorbiert die betrachtete Schicht $\varkappa A\,dx$[1]), während durch Zerstreuung die Energie um $sA\,dx$ vermindert wird, aber dieser Teil ist nicht verloren, sondern wird zur Hälfte nach rechts, zur Hälfte nach links gesendet. Ferner empfängt die Schicht von rechts eine Energiemenge B pro cm² (bestehend aus zerstreuter Strahlung und Eigenstrahlung vom äußersten Teile der Atmosphäre); davon werden $\varkappa B\,dx$ durch Absorption und $sB\,dx$ durch Diffusion entzogen, wovon jedoch $\frac{1}{2}sB\,dx$ nach links und $\frac{1}{2}sB\,dx$ nach rechts geht. Und endlich strahlt die Schicht selbst nach beiden Seiten die Energie $\varkappa E\,dx$ aus, wenn E das Emissionsvermögen des schwarzen Körpers bei der Temperatur der Schicht ist.

Alles dies läßt sich in die zwei folgenden Gleichungen zusammenfassen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dA}{dx} &= \varkappa(E - A) + \tfrac{1}{2}s(B - A)\\ \frac{dB}{dx} &= \varkappa(B - E) + \tfrac{1}{2}s(B - A)\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Wird nun angenommen, daß die Temperatur in der Atmosphäre überall gleich sei, so daß man E, $\varkappa$ und s als konstant ansehen darf, dann können A und B als Funktionen von x bestimmt werden. Es werde x nach rechts positiv gerechnet und der Nullpunkt an die äußerste Grenze der Atmosphäre gelegt, dann ist die Energie R, die nach außen ausgestrahlt wird, gleich dem Werte von A für $x = 0$, während überdies an der Grenze $B = 0$ wird. Ferner hat man die Bedingung, daß für $x = -t$, $A = S$ sein muß.

Diese Angaben genügen, um für R zu dem Ausdruck zu gelangen:

$$R = 2\alpha\,\frac{[(1+\alpha)\,e^{\alpha(x+s)t} + (1-\alpha)\,e^{-\alpha(x+s)t}]\,E + 2\,(S - E)}{(1+\alpha)^2\,e^{\alpha(x+s)t} - (1-\alpha)^2\,e^{-\alpha(x+s)t}}, \quad (14)$$

worin $\alpha = \sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa + s}}$.

Um die Art dieser verwickelten Beziehung einigermaßen zu übersehen, hat Schuster für das Verhältnis $\frac{\varkappa}{s} = \beta$ und für das Produkt $s \cdot t$ einfache Zahlenwerte gewählt und in allen jenen Fällen $\frac{R}{S}$ als Funktion von $\frac{E}{S}$ ausgerechnet und graphisch dargestellt.

Was die Ergebnisse dieser Rechnung und weitere Schlußfolgerungen betrifft, so verweise ich auf die Originalarbeit.

Als Funktionen von der Wellenlänge hat Schuster $\varkappa$ und s nicht näher betrachtet.

Uns liegt nun daran, gerade den selektiven Charakter dieser Größen in den Vordergrund zu stellen, und dazu ist der einfache Ausdruck von großer Bedeutung, in welchen Gleichung (14) übergeht, im Falle man den Absorptionskoeffizienten $\varkappa$ gleich Null setzt. Bezeichnen wir die in diesem Falle pro cm³ austretende Energiemenge mit R_0, so ist[1])

$$R_0 = \frac{2}{2 + s \cdot t}\,S. \quad (15)$$

Bevor wir zu der Anwendung dieser Formel übergehen, sei noch eben daran erinnert, daß

1) Ich habe die Bezeichnungen Schusters unverändert aufgenommen und muß daher aufmerksam machen, daß der hier gebrauchte Koeffizient $\varkappa$ nicht derselbe ist wie der in § 2, § 3 und § 4 dieser Arbeit benutzte, sondern die Bedeutung hat, die in Gl. (12) dem Ausdruck $\frac{4\pi}{\lambda}n\varkappa$ zukommt.

1) Schuster, l. c. S. 6.

Schuster bei der Ableitung von Gl. (14) angenommen hatte, daß die Temperatur der Gasmasse überall dieselbe und die Strahlungsstärke unabhängig von der Richtung sei. Da diese Bedingungen in der Atmosphäre eines Himmelskörpers natürlich nicht erfüllt sind, geben Gl. (14) und (15) nur eine erste Annäherung und muß der Einfluß der genannten Umstände später besonders untersucht werden.

In § 4 führten wir die Hypothese ein, daß das erste Glied des Dämpfungsfaktors in kleinem Abstande von der Eigenfrequenz verschwindet, und daß deshalb in allen Fällen, wo die Gasschicht dick genug ist, um auch die Zerstreuung merklich zu machen, das eigentliche Absorptionsgebiet auf den mittelsten Teil der dunklen Linien beschränkt ist. Auf Grund dessen halten wir Gl. (15) für alle übrigen Teile des Spektrums für gültig, bei dem Sonnenspektrum z. B. also auch bis zu einer gewissen Tiefe innerhalb der Fraunhoferschen Linien.

Die Gl. (15) sagt aus, daß mit zunehmender Schichtdicke t die Stärke der austretenden Strahlung vermindert wird, doch langsamer als es der Fall sein würde, wenn für die Zerstreuung dasselbe Gesetz gälte wie für die Absorption. Wäre z. B. $s \cdot t = 98$, so daß 2 Proz. des einfallenden Lichtes durchgelassen würde, dann würde bei Verdoppelung der Schicht noch gut 1 Proz. die Atmosphäre verlassen; hätte dagegen derselbe Verlust in der ersten Schicht durch Absorption stattgefunden, dann hätte eine Schicht von der doppelten Dicke nur 0,04 Proz. durchgelassen.

Selbst ein äußerst kleiner Absorptionskoeffizient müßte in einer so enorm dicken Gasschicht, wie die Sonnenatmosphäre es ist, eine beträchtliche Lichtschwächung zur Folge haben. Die Schmalheit der meisten Fraunhoferschen Linien und die Verwaschenheit einiger derselben scheint uns daher leichter verständlich, wenn wir annehmen dürfen, daß der Absorptionskoeffizient bereits in sehr kleinem Abstande von der Mitte der Linie gleich Null ist, und daß die Lichtverteilung im übrigen durch Diffusion und andere Einflüsse (anomale Refraktion, Beugung) beherrscht wird[1]).

Eine kräftige Stütze findet diese Hypothese vor allem in der Tatsache, daß sich eine Zahl von astrophysikalischen Erscheinungen sehr übersichtlich und zusammenhängend damit erklären lassen, wie z. B. die systematische Versetzung der Fraunhoferschen Linien, und wenn wir überdies die Strahlbrechung berücksichtigen, verschiedene Unregelmäßigkeiten in dem Aussehen dieser Linien, nebst vielen Ergebnissen der spektroheliographischen Untersuchungen.

Führen wir jetzt in Gl. (15) den aus Gl. (10) folgenden Wert des Zerstreuungskoeffizienten ein, dann haben wir

$$R_0 = \frac{3\lambda^4}{3\lambda^4 + 16\pi^3 \Delta f t \cdot R^2} S.$$

Wir wollen nun die Größe R_0 in ihrer Abhängigkeit von λ betrachten. Beschränken wir die Aufmerksamkeit immer auf einen Teil des Spektrums, der nur einige Angströmsche Einheiten umfaßt, dann können wir dafür λ^4 und S als Konstanten behandeln und setzen

$$R_0 = \frac{a}{a + b R^2} S. \qquad (16)$$

Hierin ist die Konstante b proportional zur Dichte der Gasmasse, zur Dicke der Schicht und zur mittleren Masse der zerstreuenden Teilchen. Je größer jede dieser Größen ist, desto kleiner ist (für jeden Wert von λ) die Stärke des austretenden Lichtes. In dem betrachteten kleinen Teil des Spektrums ist nur der Faktor R^2 schnell veränderlich mit λ, falls nämlich in diesem Gebiete eine Absorptionslinie gelegen ist.

Der oberste Teil von Fig. 4 soll $R = \frac{n-1}{\Delta}$ als Funktion von λ[1]) vorstellen. Der Koordinatenursprung entspricht der Wellenlänge λ_0 einer Eigenschwingung; die Linie $P_1 P_2$, die als Ordinate $\frac{n_0 - 1}{\Delta}$ hat, würde den Verlauf von R wiedergeben, falls bei λ_0 keine Absorptionslinie auftritt.

Wenn t groß genug ist, können wir dort, wo R nicht zu klein ist, im Nenner von (16) a gegenüber $b R^2$ vernachlässigen; R_0 ist also in diesem Bereich nahezu umgekehrt proportional mit R^2. Wir sehen, daß der Einfluß der Zerstreuung an der roten Seite größer ist als an der violetten Seite der Absorptionslinie, falls (wie es in der Skizze angenommen ist) n_0 größer ist als 1. Indessen wird bei sehr starken

1) Die Frage kann sich erheben, ob man Anhaltspunkte dafür hat, wie groß ungefähr der Zerstreuungseffekt ist, den man in einer Gasmasse von den Dimensionen der Sonnenatmosphäre billigerweise erwarten kann. Zufolge der Theorie von Rayleigh wird durch molekulare Zerstreuung in der Atmosphäre das mittlere Sonnenlicht bei senkrechtem Einfall auf ungefähr 95 Proz. abgeschwächt. In Gl. (15) würde also für diesen Fall $s \cdot t = 0{,}1$ sein. Nehmen wir, um Zahlen zu erhalten, an, daß die Sonnenatmosphäre 50 mal so dick ist wie die Erdatmosphäre bei gleicher mittlerer Dichte, dann wäre $s \cdot t = 5$ und daher $R_0 = \frac{2}{3}$ S. Das ist kein unvernünftiges Ergebnis. Es folgt daraus, daß die Sonnenatmosphäre, sogar bei geringerer Dichte als der angenommenen, zu merklichen Diffusionserscheinungen Veranlassung geben kann, besonders in der Nähe der Absorptionslinien.

1) In dieser Figur nimmt λ von links nach rechts zu; die Reihenfolge der Lichtarten ist also entgegengesetzt wie in den Figuren 1 und 2, wo die Frequenzen ν als Abszissen gewählt waren.

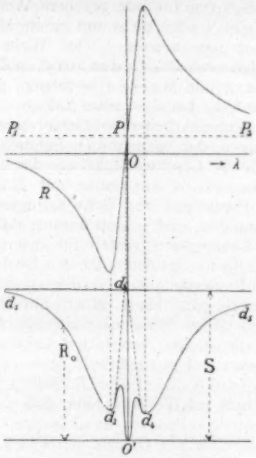

Fig. 4.

Linien die Verschiedenheit dadurch wieder teilweise aufgehoben, daß nach § 3 das Minimum des Brechungsindex weiter unter n_σ, als das Maximum über n_σ liegt.

Wenn wir dies beachten, so können wir (wenn vorläufig nur die Zerstreuung, nicht die Absorption berücksichtigt wird) die Intensität des durchgelassenen Lichtes durch eine Kurve darstellen, die ungefähr die Gestalt $d_1 d_2 d_3 d_4 d_5$ haben wird (Fig. 4, untere Hälfte). Der Scheitel d_3 liegt nicht bei λ_σ, sondern ist ein wenig nach dem Violetten verschoben. Falls man deshalb das Gebiet zwischen d_2 und d_4, wo der durch Zerstreuung verursachte Lichtverlust ein Minimum durchläuft, als Emissionslinie auffaßte, so würde man dieser eine kleinere Wellenlänge zuschreiben müssen als der Absorptionslinie, und die Anwendung des Doppler-Prinzips würde dann zu dem Trugschluß führen, daß der emittierende Dampf sich dem Beschauer nähere.

Streng genommen ist es nicht erlaubt, die Formeln (15) und (16) auf das ganze Gebiet zwischen d_2 und d_4 anzuwenden, denn wo $\varkappa$ nicht Null ist, gilt die Gleichung (14). Nehmen wir an, daß $\varkappa$ nur im mittelsten Teile einen merklichen Wert hat, dann ist es nicht unwahrscheinlich, daß man das Bild der Lichtverteilung erhält, wenn man von den Ordinaten der asymmetrischen Scheitel $d_2 d_3 d_4$ die Ordinaten einer zur Linie OO' symmetrischen Absorptionskurve abzieht. Das Resultat ist eine starke Einsenkung, die eine dunkle Linie im Spektrum bedeutet; ihr Schwerpunkt ist etwas nach der Seite der größeren Wellenlängen verschoben (in Bezug auf λ_σ), und sie beruht teils auf Absorption, teils auf Dispersion. Betrachtete man diese Linie zu Unrecht als eine reine Absorptionslinie, dann würde die Verschiebung nach Rot den Eindruck machen, als ob sich der absorbierende Dampf von dem Beobachter entfernte[1]).

Die hier genannten Eigenheiten eines breiten Dispersionsbandes, welche die Theorie in der Lichtverteilung angibt, stimmen sehr gut mit dem überein, was Charles E. St. John[2]) bei den Calciumlinien H und K des Sonnenspektrums wirklich wahrgenommen hat. Und wenn wir außer den Folgen der anomalen Diffusion auch noch die der anomalen Refraktion (welche in dieser Arbeit nicht berücksichtigt wurden) in Rechnung bringen, so erstreckt sich die Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung nahezu auf alle Einzelheiten der von St. John beschriebenen Erscheinungen. Die verwickelten Eigentümlichkeiten, welche die Unterteilungen $H_1 H_2 H_3$ $K_1 K_2 K_3$ der bekannten Calciumlinien im Spektrum der verschiedenen Teile der Sonnenscheibe aufweisen, können aus der Dispersionstheorie erklärt werden, ohne daß es nötig ist, mit St. John anzunehmen, daß sich der Calciumdampf in der Sonnenatmosphäre in radialer Zirkulation befindet mit Geschwindigkeiten, die im Mittel für den aufsteigenden Strom 1,97 km per Sekunde, für den fallenden 1,14 km per Sekunde betragen sollen. Dies werde ich binnen kurzem in einer besonderen Mitteilung näher ausführen[3]).

Bei den meisten Linien des Sonnenspektrums ist das ganze Gebiet der Dispersionsanomalie von d_1 bis d_5 so schmal, daß seine Besonderheiten zwischen d_2 und d_4 der Wahrnehmung entgehen. Dann bleibt nichts anderes davon bemerkbar, als die Asymmetrie der Dispersionsbanden der Fraunhoferschen Linien. Daraus hervorgehende Folgen (eine allgemeine Verschiebung der Fraunhoferschen Linien nach Rot; Zunahme jener Verschiebung, wenn man vom Zentrum der Sonnenscheibe bis zum Rande fortschreitet; Schiefheit der Linien des Flecken-

1) In einer früheren Arbeit (Proc. Roy. Acad. Amst. XIII, 10; Astroph. Journ. **31**, 428, 1910) schrieb ich, der zentrale Teil der K-Linie, die wahre Absorptionslinie, könne durch anomale Dispersion nicht verschoben erscheinen. Damals sah ich noch nicht ein, daß sogar die zentrale Linie K_3 eine unreine Absorptionslinie sein dürfte.

2) Charles E. St. John, The general circulation of the mean and high-level calcium vapor in the solar atmosphere. Astrophysical Journal **32**, 38—82, 1910.

3) Akad. d. Wissensch. Amst., Sitzung 28. April 1911.

spektrums bei radial gestelltem Spalt, usw.) habe ich in früheren Mitteilungen besprochen [1]).

1) Diese Zeitschr. **11**, 56—71, 1910; Astroph. Journ. **31**, 419—429, 1910; Les raies de Fraunhofer et la dispersion anomale de la lumière. „Le Radium" **7**, Okt. 1910.

(Aus dem Holländischen übersetzt von Hilde Barkhausen.)

(Eingegangen 23. Februar 1911.)

Das positive Potential des Aluminiums als eine Funktion der Wellenlänge des einfallenden Lichtes.
(The Positive Potential of Aluminium as a Function of the Wave-length of the Incident Light)

Von J. R. Wright.

Lenard[1]) war der erste, der die Geschwindigkeit untersucht hat, mit der Elektronen seitens einer Metallplatte in einem Vakuum emittiert werden, wenn die Platte mit ultraviolettem Licht beleuchtet wird. Er fand, daß die Emissionsgeschwindigkeiten von der Intensität des einfallenden Lichtes unabhängig, aber für verschiedene Metalle verschieden waren. Er schloß daher, daß der Effekt eine Resonanzerscheinung sei, und zwar so, daß die Geschwindigkeit, mit welcher die Elektronen emittiert werden, von der Energie des Elektrons innerhalb des Atomes herrühre, während das Licht einfach eine auslösende Rolle spiele. Neuerdings hat Ladenburg[2]) den Zusammenhang zwischen der Anfangsgeschwindigkeit der Emission und der Wellenlänge des auffallenden Lichtes untersucht. Er fand, daß für ein gegebenes Metall die maximale Anfangsgeschwindigkeit der Schwingungszahl des auffallenden Lichtes direkt proportional war. Er stellte an den drei Metallen Platin, Zink und Kupfer Versuche an. Ladenburg und Markau[3]) ermittelten die Kurven für die Geschwindigkeitsverteilung und wiesen damit nach, daß für ein gegebenes Spektralgebiet die emittierten Elektronen Geschwindigkeiten besitzen, die innerhalb enger Grenzen liegen. Sie schließen demzufolge, daß der photoelektrische Effekt eine reine Resonanzerscheinung ist, daß die Emission der Elektronen nur dann stattfinden wird, wenn die Schwingungszahl des Lichtes in einer bestimmten Beziehung zu jener des Elektrons innerhalb des Atomes stehen, und daß infolgedessen die Emissionsgeschwindigkeiten für jede gegebene Wellenlänge sämtlich gleich oder dicht um einen Mittelwert angeordnet sein müssen. Der Wellenlängenbereich, den einerseits Ladenburg, andererseits Ladenburg und Markau benutzten, ging von $\lambda = 2700$ Å.-E. bis $\lambda = 2000$ Å.-E. — Hull[1]) fand bei seinen Arbeiten im Gebiet sehr kurzer Wellenlängen, der sogenannten Schumannstrahlung, daß die Geschwindigkeiten der Emission von Elektronen seitens einer mit Ruß überzogenen Platte mit der Schwingungszahl des Lichtes zunahm, und schloß daraus, daß innerhalb der Genauigkeitsgrenzen für unsere Kenntnis dieses Spektralgebietes die von Ladenburg entdeckte Proportionalität für diese ganz kurzen Wellenlängen gilt. Hull erhielt mit Hilfe von Absorptionsfiltern drei Spektralgebiete. Die kürzesten Wellenlängen dieser drei Gebiete waren näherungsweise $\lambda = 1710$ Å.-E., $\lambda = 1450$ Å.-E. und $\lambda = 1230$ Å.-E. Seine Schlußfolgerungen gründen sich auf die Annahme, daß die Maximalgeschwindigkeiten von den kürzesten Wellenlängen der einzelnen Gebiete herrühren.

Wenn die Elektronen, die unter der Einwirkung des Lichtes emittiert werden, konstituierende Teile des Atomes sind, die ihr Entweichen einer Resonanz verdanken, so kann man die Emissionsgeschwindigkeiten bestimmen, indem man die maximale positive Ladung mißt, die ein Metall annimmt, wenn es in einem vollkommenen Vakuum belichtet wird. Ist nämlich m die Masse und e die Ladung des Elektrons, v die Emissionsgeschwindigkeit und V das positive Potential, das gerade ausreicht, um das schnellste Elektron auf die Platte zurückzuziehen, so ist offenbar

$$\frac{1}{2} mv^2 = eV$$

oder

$$v = \sqrt{2Ve/m}.$$

Die Werte, welche die früheren Beobachter für das positive Potential erhalten haben, erstreckten sich für die verschiedenen Metalle von 0 bis 5 Volt. Millikan und Winchester[2]) führten an elf Metallen Bestimmungen aus und erhielten dabei Werte, die zwischen 0 Volt für Blei und 1,336 Volt für Silber schwankten. Neuerdings fand Millikan[3]), als er mit denselben Metallen und unter identischen Bedingungen arbeitete, daß durch länger fortgesetzte Beleuchtung mit sehr intensivem ultravioletten Licht die positiven Potentiale auf das 10- bis 30fache der früher erhaltenen Werte gesteigert wurden.

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. (4) **2**, 259, 1900; **3**, 149, 1900.
2) E. Ladenburg, diese Zeitschr. **8**, 590, 1907.
3) E. Ladenburg und K. Markau, diese Zeitschr. **9**, 821, 1908.

1) A. W. Hull, Sill. Journ. **28**, 251, 1909.
2) R. A. Millikan and Geo. Winchester, Phil. Mag. (6) **14**, 188, 1907.
3) R. A. Millikan, Phys. Rev. **30**, 287, 1910.

Die Wichtigkeit dieser Ergebnisse machte es höchst wünschenswert, die Beziehung zwischen diesen neuen positiven Potentialen und der Wellenlänge des auffallenden Lichtes zu bestimmen. In dieser Absicht wurde die Untersuchung unternommen, deren Ergebnisse in der vorliegenden Arbeit mitgeteilt werden sollen.

Zur Bestimmung der Emissionsgeschwindigkeiten standen zwei allgemeine Methoden zur Verfügung. Entweder verbindet man eine isolierte Platte mit geerdeter Umgebung mit einem Elektrometer und mißt das höchste positive Potential, das die Platte bei Belichtung mit ultraviolettem Licht annimmt, oder man beobachtet den photoelektrischen Strom, der von der belichteten Platte zu einer gegenüber angeordneten Empfangsplatte fließt, wenn eine Potentialdifferenz zwischen den Platten besteht. Ich wählte die erste Methode als die direktere und für den Zweck der Untersuchung geeignetere.

Fig. 1 zeigt die Gestalt der benutzten Röhre und die Anordnung der Apparatur. Das Licht des Funkens ging durch das mit den Quarz-

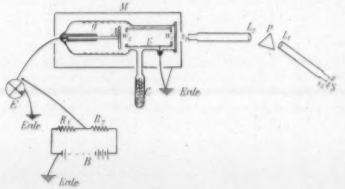

Fig. 1.

linsen L_1 und L_2 und dem Quarzprisma P ausgestattete Spektrometer, darauf durch das Quarzfenster Q und fiel auf die isolierte Aluminiumplatte A. Diese maß 3 cm im Durchmesser und war mit dem einen Quadrantenpaar eines gut isolierten Dolezalekschen Elektrometers E verbunden. Das Elektrometer gab einen Ausschlag von etwa 4 cm per Volt bei einem Skalenabstand von 125 cm. G ist ein auf der Innenseite geschwärztes Messingrohr. Es ist mit den beiden Ringen w_1 und w_2 versehen, die so angeordnet sind, daß praktisch kein Licht auf die Innenseite des Rohres fiel. G wurde während des ganzen Versuches geerdet gehalten und war mit dem Drahtnetz g metallisch verbunden, das A vollständig umgab. Die beiden Spektrometerspalte s_1 und s_2 waren 1 mm breit. Zum Schutze gegen elektrostatische Wirkungen war das Rohr ganz und gar von dem geerdeten Metallgehäuse M umgeben. Die Potentiometeranordnung bestand aus den beiden Widerständen R_1 und R_2 und der Batterie B und wurde benutzt, um eine positive Ladung auf A zu bringen.

Die Quelle für das ultraviolette Licht war ein sehr kräftiger Funken zwischen Metallelektroden; die Funkenstrecke war ungefähr 2,5 mm lang. Die Funkenelektroden, zu denen acht große Leidener Flaschen parallel geschaltet waren, bildeten die Enden der Sekundärwirkung eines großen Scheidelschen Umformers, durch dessen Primärspule 10 Ampere bei einer Potentialdifferenz von ungefähr 25 Volt gingen. Unter mehreren Metallen, die ich als Elektroden versuchte, erwiesen sich Zink, Kadmium und Eisen als die wirksamsten.

Das Vakuum war so gut, wie es nur irgend nach dem Verfahren von Dewar zu erhalten war. Die Röhre wurde an eine Quecksilberpumpe angeschlossen, und das Gefäß mit Kokosnußkohle — C in Fig. 1 — wurde während des Auspumpens auf 360° C erhitzt. Eine Glimmentladung wurde mehrere Stunden lang von A nach G gesandt, um die Elektrode A nach Möglichkeit von okkludierten Gasen zu befreien. Das Auspumpen wurde bis zu einem Vakuum von angenähert 0,00001 mm Quecksilber, nach den Angaben eines McLeodschen Manometers, fortgesetzt. Die Röhre wurde dann nach einem Zeitraum von sechs Monaten, während dessen das Vakuum konstant blieb, von der Pumpe abgeschmolzen und in der Weise angeordnet, wie es Fig. 1 zeigt.

Die Beobachtungsmethode, die ich schließlich anwandte, bestand darin, daß ich mit Hilfe der Potentiometeranordnung eine positive Ladung auf A brachte und dann A mit dem ultravioletten Licht so lange belichtete, bis das Elektrometer den natürlichen Abfall des Systems angab, der ungefähr 0,8 mm in der Minute betrug. Ich beobachtete dann diesen Punkt und maß das positive Potential, das erforderlich war, um denselben Ausschlag zu ergeben. Durch dieses Beobachtungsverfahren wurde die Belichtungsdauer stark vermindert und damit einer übermäßigen Erhitzung der Funkenelektroden vorgebeugt. Diese Methode wurde durch Vergleichung mit der direkten Beobachtung kontrolliert; das heißt, ich begann damit, daß A das Potential Null hatte, und belichtete dann, bis das höchste positive Potential erreicht wurde. Es zeigte sich, daß die beiden Methoden durchaus übereinstimmende Werte ergaben.

Während der vorläufigen Beobachtungen wurde das Spektrometer entfernt und der Funken an die Stelle gebracht, die s einnimmt. Die erste Beobachtung über das positive Potential bei unzerlegtem Licht ergab einen Wert von 0,25 Volt. Dann belichtete ich die Platte während eines Zeitraumes von drei Wochen täg-

lich mehrere Stunden lang in Zwischenräumen von zehn Minuten. Zwischen den Belichtungen wurde das positive Potential mehrfach bestimmt. Es ergab sich, daß das positive Potential übereinstimmend mit der Belichtung zunahm, bis es einen Wert von 13,5 Volt erreichte; darüber hinaus brachte eine weitere Exposition gegen das Licht anscheinend keine Wirkung hervor.

Ich behaupte keineswegs, daß dieser Wert von 13,5 Volt das wahre maximale positive Potential für Aluminium ist. Es ist kaum zweifelhaft, daß Licht, das von der Scheibe A reflektiert wird, dazu Anlaß geben wird, daß Elektronen seitens des Messingrohres G emittiert werden; diese Elektronen werden dann unter dem Einflusse des elektrischen Feldes nach A fließen. Weiter werden, wie O. v. Baeyer[1]) gezeigt hat, langsame Elektronen sehr stark reflektiert werden, und dieser Umstand wird, wie bei Elektronen, die durch das reflektierte Licht hervorgerufen wurden, dahin wirken, den beobachteten Wert für das positive Potential zu verringern. In welchem Maße das positive Potential durch diese Ursachen beeinflußt werden wird, ist anscheinend noch eine offene Frage. Ladenburg und Markau[2]) fanden, daß es einen merklichen Einfluß sowohl auf den Wert des positiven Potentiales als auch auf die Kurven für die Geschwindigkeitsverteilung hatte, wenn die Reflexion vermieden wurde; dagegen erhielt Klages[3]) mit einer ähnlichen Anordnung seiner Apparatur Ergebnisse, auf Grund derer er zu genau entgegengesetzten Schlußfolgerungen gelangte. Die einzige Vorsichtsmaßregel, die bei der für die vorliegende Untersuchung benutzten Versuchsanordnung angewandt wurde, um die Reflexion zu verhindern, war die Schwärzung der Innenseite des Rohres G. Da der Hauptzweck dieser Untersuchung darin bestand, die Beziehung festzustellen, die zwischen dem positiven Potential und der Wellenlänge des auftreffenden Lichtes besteht, so wird eine kleine Verschiedenheit zwischen dem gemessenen Werte des Potentials und dem absoluten Werte keinen merklichen Einfluß auf die gewonnenen Ergebnisse ausüben. Das Problem, die absoluten Werte der positiven Potentiale zu erhalten, wird gegenwärtig im hiesigen Institut zum Gegenstande einer besonderen Untersuchung gemacht.

Ehe ich die Beziehung zwischen dem positiven Potential und der Wellenlänge des auffallenden Lichtes erhielt, bestimmte ich die Geschwindigkeit, mit der das positive Potential bei irgendeinem engen Spektralgebiet angenommen wurde. Ich ging von A mit dem Potential Null aus und las von zehn zu zehn Sekunden den Elektrometerausschlag ab, der dem positiven Potential entsprach. Ich benützte Licht des Zinkfunkens von der mittleren Wellenlänge 2166 Å.-E. Die Ergebnisse sind in der Kurve I (Fig. 2) graphisch dargestellt. Die Abszissen entsprechen hier der Zeit und die Ordinaten den Elektrometerausschlägen. Wegen der Erwärmung der Funkenelektroden war es unmöglich, die Belichtung so lange fortzusetzen, bis das Höchstpotential erreicht war. Der höchste in der Kurve I dargestellte Ausschlag entspricht einem positiven Potential von 12,3 Volt. Der glatte Verlauf der Kurve zeigt deutlich, mit welchem Grade von Genauigkeit sich die Beobachtungen des positiven Potentials unter den während der ganzen Untersuchung herrschenden

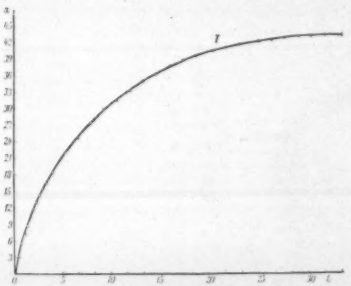

Fig. 2.

Verhältnissen ausführen ließen. Da die Schlüsse, die aus den Kurven für das positive Potential (siehe weiter unten die Kurven V, VI, VII in Fig. 4, 5, 6) zu ziehen sind, sehr von der Genauigkeit der Beobachtungen abhängig sein müssen, so hielt ich es für wesentlich, eine Kurve einzuschalten, die über diesen Punkt Aufschluß gibt. Abgesehen von dem oben erwähnten Zweck, ist der Kurve I eine Bedeutung nicht beizumessen.

Ich stellte alsdann Versuche an über die photoelektrische Empfindlichkeit der Scheibe A für Licht verschiedener Strahlungsquellen. Die Ergebnisse für Funken zwischen Elekroden aus Zink, Kadmium und Eisen sind in den Kurven II, III und IV (Fig. 3) niedergelegt. Das Beobachtungsverfahren war das bei derartigen Bestimmungen gewöhnlich benutzte. Die Scheibe wurde auf ein negatives Potential von zehn Volt aufgeladen, dann je eine Minute lang mit Licht verschiedener Wellenlängen belichtet und der zu-

1) O. v. Baeyer, Verh. d. D. phys. Ges. **10**, 96, 953, 1908.

2) Ladenburg und Markau, diese Zeitschr. **9**, 821, 1908.

3) A. Klages, Ann. d. Phys. (4) **31**, 343, 1910.

gehörige Elektrometerausschlag beobachtet. In den Kurven sind die Wellenlängen längs der Abszissenachse und die dem photoelektrischen Strom proportionalen Elektrometerausschläge längs der Ordinatenachse aufgetragen. Die Intensität des Lichtes wurde während dieser Beobachtungen mit möglichster Annäherung konstant gehalten. Eine Untersuchung dieser Kurven in ihrer Beziehung zu den Kurven des positiven Potentials werde ich später vornehmen.

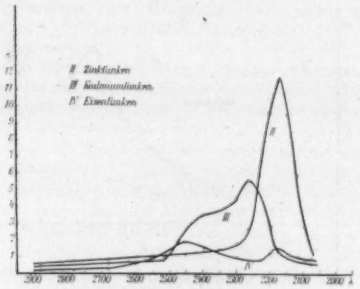

Fig. 3.

Darauf bestimmte ich das positive Potential für bestimmte Wellenlängen in dem Spektralgebiet von $\lambda = 2878$ Å.-E. bis $\lambda = 2073$ Å.-E. Eine typische Reihe von Ergebnissen, die ich unter Verwendung des Lichtes des Funkens zwischen Zinkelektroden auf diese Weise gewonnen habe, habe ich in Tabelle I wiedergegeben und in Kurve V (Fig. 4) graphisch dargestellt. In dieser Kurve stellen die Ordinaten die Quadratwurzeln der positiven Potentiale und die Abszissen die Wellenlängen dar. Während der Beobachtungsreihe, die in Tabelle I wiedergegeben ist, tauchte das Rohr mit der Kokosnußkohle in flüssige Luft ein. Ich führte mehrere Beobachtungsreihen ohne Verwendung flüssiger Luft aus; die einzige Abweichung von den eben erwähnten Ergebnissen bestand dabei in einer Erniedrigung des positiven Potentials um etwa 5 v. H. Während der einzelnen Beobachtungsreihen hielt ich die Intensität des Lichtes so konstant wie möglich, doch gab ich mir keine Mühe, die Intensität für verschiedene Beobachtungsreihen gleich zu halten. Ich veränderte im Gegenteil absichtlich von Zeit zu Zeit die Länge der Funkenstrecke und veränderte auch den durch die Primärspule des Umformers fließenden Strom in einem Bereich von 8—15 Ampere. Dagegen hielt ich während des ganzen Verlaufes der Untersuchung die zur Funkenstrecke parallel geschaltete Kapazität konstant. Im allgemeinen nahm ich die Kurven für den photoelektrischen Strom unmittelbar vor den Beobachtungen über das positive Potential auf.

Tabelle I. Zinkfunken.

δ = Ablenkungswinkel ($Na = 0$), V = positives Potential, λ = Wellenlänge.

δ	λ	V	$\sqrt{V}$
3° 48′	2878	6,75	2,598
4° 48′	2678	7,25	2,693
5° 48′	2513	7,88	2,807
6° 48′	2392	8,71	2,951
7° 48′	2294	9,69	3,113
8° 18′	2258	10,57	3,251
8° 48′	2226	11,58	3,432
9° 18′	2195	13,45	3,667
9° 48′	2166	14,19 *)	3,767
10° 18′	2139	13,77	3,711
10° 48′	2113	12,99	3,604
11° 18′	2092	11,96	3,458
11° 48′	2073	11,19	3,345

*) 14,19 Volt = $2{,}23 \times 10^8$ cm/sec.

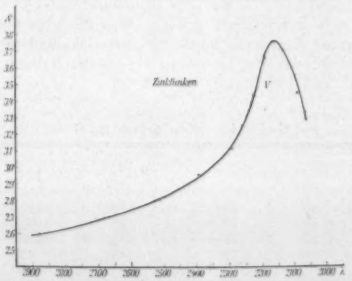

Fig. 4.

Ich änderte den Versuch dann in der Weise ab, daß ich das Licht von Funken zwischen Kadmium- und zwischen Eisenelektroden benutzte. Die Ergebnisse habe ich in den Tabellen II und III wiedergegeben und in den Kurven VI und VII (Fig. 5 und 6) graphisch dargestellt. Eine Untersuchung der Tabellen I, II und III und der Kurven V, VI und VII lehrt, daß das positive Potential, im Gegensatz zu den Ergebnissen, die Ladenburg und Hull erhalten haben, nicht nach einer linearen Funktion der Schwingungszahl des einfallenden Lichtes zunimmt, sondern bei $\lambda = 2166$ Å.-E. einen Höchstwert erreicht. Die Verwendung verschiedener Lichtquellen ist sowohl auf die Lage des Höchstwertes wie auf seinen numerischen Wert ohne Einfluß. Die kleinen Unterschiede in den numerischen Werten der Maxima können zwei Ursachen zugeschrieben werden: erstens Beobachtungsfehlern,

und zweitens Änderungen im natürlichen Abfall des Elektrometersystems, der sich mit den Witterungsverhältnissen etwas änderte. Die Gestalt der Kurve VI weicht ein wenig von denen der Kurven V und VII ab. Diese Abweichung beruht vermutlich, wenigstens bis zu einem beträchtlichen Grade, auf der Wirkung des reflektierten Lichtes. Da sich das Intensitätsverhältnis des Lichtes der verschiedenen Quellen mit der Wellenlänge erheblich ändert, so ist zu erwarten, daß sich auch die vom reflektierenden Lichte herrührende Wirkung ändert und dadurch eine geringe Verschiedenheit in den gemessenen positiven Potentialen verursacht. Zum Teil jedoch mag die Verschiedenheit darauf beruhen, daß die Feststellung der Punkte bei Wellenlängen in dem Gebiete von $\lambda = 2900$ Å.-E. bis $\lambda = 2650$ Å.-E. Schwierigkeiten begegnet. Die Ablesungen in der Umgebung des Maximums waren leicht bis auf 3 mm bei einem Gesamtausschlag von ungefähr 500 mm sicher zu machen; in dem Spektralgebiet zwischen $\lambda = 2900$ Å.-E. und $\lambda = 2650$ Å.-E. war der Beobachtungsfehler dagegen beträchtlich größer, weil die photoelektrische Empfindlichkeit für diese Wellenlängen verhältnismäßig klein war, wie aus den Kurven II, III und IV (Fig. 3) hervorgeht.

Tabelle II. Kadmiumfunken.

δ	λ	V	$\sqrt{V}$
3° 48′	2878	7,80	2,794
4° 48′	2678	8,27	2,875
5° 48′	2512	9,14	3,001
6° 48′	2392	10,46	3,234
7° 48′	2294	12,10	3,478
8° 18′	2258	12,92	3,592
8° 48′	2226	13,37	3,652
9° 18′	2195	13,77	3,706
9° 48′	2166	14,04	3,744
10° 18′	2139	13,66	3,698
10° 48′	2113	13,22	3,636

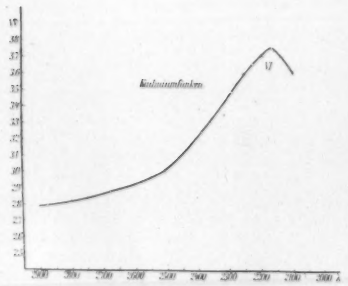

Fig. 5.

Tabelle III. Eisenfunken.

δ	λ	V	$\sqrt{V}$
5° 48′	2512	8,59	2,931
6° 18′	2448	8,88	2,980
7° 18′	2347	10,09	3,176
8° 18′	2258	11,13	3,334
9° 18′	2195	13,01	3,604
9° 48′	2166	14,16	3,759
10° 18′	2139	13,61	3,688
10° 48′	2113	12,93	3,597

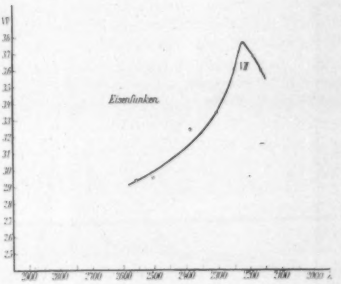

Fig. 6.

Die vollständige Unabhängigkeit des positiven Potentials von der Intensität des Lichtes geht klar aus einer Vergleichung der Kurven II, III, IV für die Wellenlänge 2166 Å.-E. hervor, die bei allen drei Funken den Höchstwert des Potentials liefert. Während das Verhältnis der Lichtintensitäten bei dieser Wellenlänge für die drei Funken annähernd 10 : 12 : 100 betrug, ist die größte Abweichung des positiven Potentials vom Mittelwert kleiner als 0,5 v. H. Noch überzeugender geht dies aus anderen Beobachtungsreihen hervor, bei denen das Intensitätsverhältnis weitere Abweichungen aufweist.

Die mangelnde Übereinstimmung zwischen diesen Ergebnissen und denen von Ladenburg und von Hull beruht vermutlich auf irgendwelcher Veränderung, die an der Oberfläche des Metalls bei der Belichtung vor sich geht. Ob diese Veränderung auf dem Zerfall einer gasförmigen elektrischen Doppelschicht beruht, oder einfach auf einer Reinigung der Oberfläche, oder auf beiden Ursachen vereint, das läßt sich nicht leicht feststellen. Daß durch die Emission von Elektronen seitens des Metalls unter der Einwirkung des Lichts tatsächlich die Oberfläche gereinigt wurde, stand bei diesen Versuchen außer Zweifel. Durch die Verwendung der Scheibe als Kathode für eine Entladung eines Induktors im Anfangsstadium der Entluftung der Röhre war die Oberfläche des

Metalls ein wenig verunreinigt worden. Nachdem die Scheibe eine Zeitlang belichtet worden war, fand ich, daß der belichtete Teil entschieden heller geworden war und das Aussehen frisch polierten Aluminiums zeigte, während der unbelichtete Teil rings am Rande dunkel blieb. Daß die Zunahme des positiven Potentials von 0,25 Volt auf 14,1 Volt allein auf einen Reinigungsprozeß zurückgeführt werden könne, erscheint höchstunwahrscheinlich angesichts der Ergebnisse, die Millikan[1]) an Metallen erhalten hat, die ohne Zuhilfenahme von Öl poliert und nicht als Kathode für eine Induktorentladung benutzt worden waren.

Ob andere Metalle eine ähnliche Beziehung zwischen dem positiven Potential und der Wellenlänge des auffallenden Lichtes zeigen werden, das ist eine wichtige Frage. Diese Frage wird gegenwärtig von Herrn Professor Millikan und mir untersucht.

Ehe ich schließe, möchte ich Herrn Professor Michelson und den Mitgliedern der Abteilung für Physik für das Interesse danken, das sie für diese Arbeit an den Tag gelegt haben. Vornehmlich möchte ich Herrn Professor Millikan, auf dessen Anregung ich diese Untersuchung unternommen habe, für die vielen wertvollen Hinweise danken.

Zusammenfassung der Ergebnisse.

Es hat sich ergeben, daß das positive Potential des Aluminiums infolge langer Exposition gegen sehr intensives ultraviolettes Licht von 0,25 Volt auf 14,1 Volt steigt. Der Zusammenhang zwischen diesem verhältnismäßig hohen positiven Potential und der Wellenlänge des einfallenden Lichtes wurde bestimmt, und es stellte sich heraus, daß das positive Potential, im Gegensatze zu den Ergebnissen, die Ladenburg und Hull erhalten haben, ein scharfes Maximum bei 2166 Å.-E. erreicht. Die Verwendung von Licht aus verschiedenen Quellen ist sowohl auf den Wert des Maximums als auch auf seine Lage im Spektrum ohne Einfluß.

1) K. A. Millikan, Phys. Rev. **30**, 287, 1910.

Universität of Chicago.

(Nach dem Manuskript aus dem Englischen übersetzt von Max Iklé.)

(Eingegangen 22. Februar 1911.)

Energiemessung an Hochspannungslichtbögen.

Von J. Zenneck.

Mit 1 Tafel (III).

1. Die übliche Methode, um den Energieverbrauch eines Apparats in einer Hochspannungsleitung zu messen ist durch die Verwendung von Meßtransformatoren mit Eisenkernen gekennzeichnet. In Fig. 1 ist eine derartige Schaltung skizziert: A ist der Apparat, dessen Energieverbrauch bestimmt werden soll, S_1 ein Stromwandler (Stromtransformator), S_2 ein Spannungswandler (Spannungstransformator), s_1 die Stromspule, s_2 die Spannungsspule des Wattmeters bzw. Zählers W. Der Vorteil dieser Meßmethode beruht im vorliegenden Fall hauptsächlich darauf, daß das Meßinstrument W in keiner leitenden Verbindung mit der Hochspannungsleitung L steht, demnach weder außergewöhnliche Isolation erfordert, noch Hochspannungsstörungen ausgesetzt ist, noch eine Gefahr für den Ablesenden bietet.

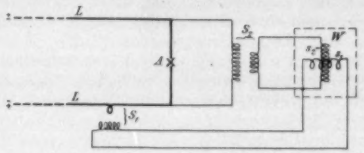

Fig. 1.

Die Genauigkeit der Methode ist, wenn es sich um die Messung des Energieverbrauchs in Transformatoren oder ähnlichem handelt, für technische Zwecke völlig ausreichend.

Das gilt indes nicht, wenn der Energieverbrauch in Hochspannungs-Lichtbögen bestimmt werden soll. Hier hat sich gezeigt, daß diese Methode auch bei Verwendung von sog. Präzisions-Strom- und -Spannungswandlern zu groben Fehlern Veranlassung gibt[1]).

2. Der Grund liegt in erster Linie in den elektrischen Eigenschaften des Wechselstromlichtbogens.

a) Es ist bekannt, daß bei einem Wechselstromlichtbogen, bei welchem die Elektroden in irgendwelcher Beziehung, z. B. bezüglich des Materials oder der Temperatur, sich voneinander unterscheiden, die Amplitude des Stroms und der Bogenspannung für die beiden

1) Darauf habe ich schon früher hingewiesen: diese Zeitschr. 11, 896, 1910.

Stromrichtungen im allgemeinen verschieden ist[1]). Dasselbe tritt auch ein, wenn die beiden Elektroden durch die Luftströmung[2]) in verschiedener Weise bedacht sind.

Man pflegt unter diesen Umständen den Strom und die Bogenspannung aufzufassen als zusammengesetzt aus einer Gleichstrom- und einer Wechselstromkomponente. Die Größe der Gleichstromkomponente läßt sich durch einen geeigneten Strom- bzw. Spannungsmesser nach dem Deprez-d'Arsonval-System[3]) leicht feststellen.

b) Aber auch dann, wenn die Elektroden in jeder Beziehung genau gleich angefertigt worden sind und die Luft genau symmetrisch zu beiden Elektroden strömt, ist im allgemeinen die Amplitude von Strom und Bogenspannung für beide Stromrichtungen verschieden. Durch den Bogen selbst entstehen an der Oberfläche der Elektroden kleine Unebenheiten. Dadurch, daß der Bogen bald an einer Unebenheit der einen Elektrode, bald an einer solchen der andern für einen Augenblick sich festsetzt, entstehen bald an der einen, bald an der anderen Elektrode starke lokale Erhitzungen. Die Folge davon ist, daß die Amplitude bald in der einen, bald in der anderen Richtung überwiegt.

Man kann es auch in diesem Falle rechtfertigen, zu sagen, daß eine Gleichstromkomponente vorhanden sei; aber diese Gleichstromkomponente verändert mit der Zeit in durchaus unregelmäßiger Weise ihre Größe und auch ihre Richtung[4]). Sie kann infolge davon durch Deprez-d'Arsonval-Instrumente, die gewöhnlich ziemlich stark gedämpft sind, im allgemeinen nicht nachgewiesen werden. Zu ihrem Nachweis ist ein Oszillograph irgendwelcher Art, z. B. eine Braunsche Röhre (vgl. unten), erforderlich.

3. Die Gleichstromkomponente des Bogenstroms ist von verhältnismäßig geringer Wirkung auf den Stromwandler. Gewöhnlich ist sie nur klein im Verhältnis zur Wechselstromamplitude, und nur in diesem Verhältnis wird die magnetische Feldstärke im Stromwandler beeinflußt.

Ganz anders liegen aber die Verhältnisse bei der Gleichstromkomponente der Bogenspannung und ihrem Einfluß auf die Spannungswandler. Das magnetische Feld im Eisenkern desselben wird bestimmt durch den Strom, der durch den Spannungswandler hindurchgeht. Für die Wechselstromkomponente desselben ist maßgebend die Wechselstromkomponente der Bogenspannung und die Impedanz des Spannungswandlers, für den Gleichstrom dagegen die Gleichstromkomponente der Bogenspannung und der Ohmsche Widerstand des Spannungswandlers. Da dieser Widerstand im allgemeinen sehr klein ist gegen die Impedanz, so kann der Gleichstrom, der durch den Spannungswandler hindurchgeht, auch dann ebenso groß oder größer werden als der Wechselstrom, wenn die Gleichstromkomponente der Bogenspannung nur wenige Prozente von der Amplitude der Wechselstromkomponente beträgt.

Bei einem technischen Spannungswandler (10000/100 Volt) z. B. war, wenn der Spannungswandler sekundär nicht belastet war, bei einer Wechselstromspannung von 6000 Volt (effektiv) der Wechselstrom 0,0057 Amp., wenn der Spannungswandler sekundär durch das dazugehörige Voltmeter von 535 Ohm belastet war, 0,0061 Amp., während bei demselben Spannungswandler einer Gleichstromspannung von 21 Volt ein Gleichstrom von 0,006 Amp. entsprach. Wenn also im vorliegenden Fall die Gleichstromkomponente der Bogenspannung nur 0,35 Proz. des Effektivwerts der Wechselstromkomponente beträgt, so genügt dies schon, um durch den Spannungswandler einen Gleichstrom hindurchzuschicken, der ebenso groß ist wie der Effektivwert des Wechselstroms.

Das Gesagte gilt qualitativ auch dann noch, wenn die Gleichstromkomponente der Ofenspannung nach Größe und Richtung nicht konstant ist (2b). Um einen solchen Fall zu realisieren, wurde gegen einen Hörnerblitzableiter mit genau gleichen Elektroden aus 13 mm dicken Kupferstäben ein Luftstrom genau symmetrisch geblasen und zwischen den Elektroden ein Hochspannungslichtbogen durch einen Wechselstromtransformator (Frequenz = 50/Sec.) hergestellt (vgl. Fig. 2). Parallel zum Bogen waren

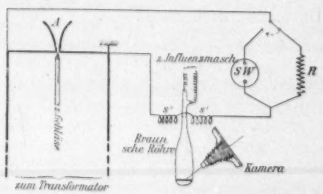

Fig. 2.

1) Vgl. z. B. B. Monasch, Der elektrische Lichtbogen bei Gleich- und Wechselstrom, S. 112. Berlin 1904.

2) bezw. allgemein: Strömung des Gases, in welchem der Lichtbogen brennt.

3) Eventuell unter Vorschaltung von Drosselspulen, um den Wechselstrom durch das Instrument hindurch zu schwächen.

4) Man kann natürlich auch sagen: es superponiert sich über den Wechselstrom der normalen Frequenz ein Wechselstrom von viel geringerer und inkonstanter Frequenz.

zwei kleine Spulen (s' und s'', Fig. 2), die das Kathodenstrahlenbündel einer Braunschen Röhre ablenkten, gelegt unter Vorschaltung entweder eines hohen Widerstandes R oder der Hochspannungswicklung eines Spannungswandlers (SW Fig. 2). Der Fleck der Braunschen Röhre wurde auf eine photographische Platte, die senkrecht zur Ablenkung des Fleckes langsam bewegt wurde, photographiert. War nun der Widerstand R eingeschaltet, so erhielt man das Bild von Fig. 3[1]); es gibt ziemlich genau den zeitlichen Verlauf der Bogenspannung an, da die Induktanz der Spulen $s'+s''$ nur klein war gegenüber dem Widerstand R. Die Ablenkung nach oben ist stets nur sehr wenig verschieden von derjenigen nach unten, die Gleichstromkomponente der Bogenspannung also sehr klein gegenüber der Wechselstromkomponente. Wurde der Vorschaltwiderstand R durch den unbelasteten Spannungswandler SW ersetzt, so ergab sich das Bild von Fig. 4: der Strom, der durch den Spannungswandler hindurchgeht, besitzt starke Unsymmetrien, seine Gleichstromkomponente ist meist sehr groß, aber wie Fig. 4 anschaulich zeigt, nach Größe und Richtung durchaus unbeständig.

4. Eine Gleichstromkomponente im Spannungswandler hat, abgesehen von einer erheblichen Verstärkung der Wärmeentwicklung und damit einer Gefährdung des Spannungswandlers, zur Folge, daß die magnetischen Verhältnisse im Eisenkern sich verändern. Während ohne Vorhandensein einer Gleichstromkomponente die Feldstärke zwischen zwei gleichgroßen Werten $+H$ und $-H$ schwankt, ändert sich die Feldstärke nun zwischen den unsymmetrischen Werten $G+H$ und $G-H$, wobei G, die durch den Gleichstrom hervorgerufene magnetische Feldstärke, größer als H sein kann. Durch den Gleichstrom wird also der zeitliche Verlauf der magnetischen Feldstärke durchaus unsymmetrisch, sie kann in Gebiete der Magnetisierungskurve verschoben werden, in welchen die Verhältnisse ganz andere sind als in demjenigen Gebiet, für welches der Spannungswandler gebaut ist. Für die sekundäre Niederspannung des Spannungswandlers kann dies aber eine Verzerrung der Spannungskurve bzw. eine Änderung der normalen Phase und Amplitude bedingen. Wenn dies der Fall ist, so müssen auch notwendig sekundär angeschlossene Wattmeter bzw. Zähler falsch zeigen.

5. Zur Prüfung der besprochenen Auffassung wurden u. a. folgende Versuche gemacht:

1) Fig. 3 und 4 siehe Tafel III.

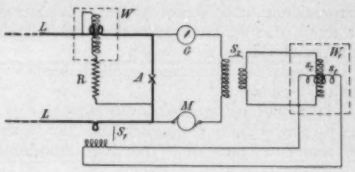

Fig. 5.

a) Kompensation der Gleichstromkomponente der Bogenspannung (Fig. 5).

Die Leistung des mit unsymmetrischen Elektroden versehenen Hochspannungslichtbogens A wurde einerseits gemessen durch das elektrodynamische Präzisions-Wattmeter W, dessen Stromspule direkt in die Leitung L eingeschaltet wurde, und dessen Spannungsspule ein praktisch induktionsfreier Widerstand R vorgeschaltet war, anderseits durch das elektrodynamische Präzisions-Wattmeter W_1, das mit Strom- und Spannungswandlern (S_1 und S_2, Fig. 5) arbeitete. In der Zuleitung zum Spannungswandler befand sich eine Gleichstrommaschine M, durch welche der durch den Spannungswandler hindurchgehende Gleichstrom je nach der Schaltung der Maschinenpole verstärkt oder geschwächt werden konnte, ohne daß der durch den Spannungswandler hindurchgehende Wechselstrom sich in merkbarer Weise veränderte. Zur Messung des Gleichstroms diente das Deprez-d'Arsonval-Instrument G (Fig. 5). In Fig. 6 ist der Unterschied zwischen den

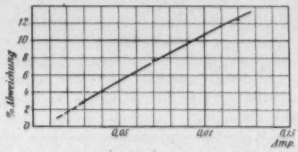

Fig. 6.

Angaben von W_1 und den richtigen Angaben von W in Prozenten dieser letzteren für die verschiedenen Größen des Gleichstroms dargestellt. Die Kurve, deren Abszissen den gesamten von der Lichtbogenspannung und Maschine herrührenden Gleichstrom darstellen, zeigt, daß der Fehler des Wattmeters W_1 um so größer wird, je größer der Gleichstrom ist. Es ist aus derselben ohne weiteres ersichtlich, daß der Fehler fast unmerklich geworden wäre, wenn die Spannung der Maschine M ausgereicht hätte, um die Gleichstromkomponente der Bogenspannung ganz zu

kompensieren und dadurch den Gleichstrom, der durch den Spannungswandler hindurchgeht, zum Verschwinden zu bringen.

b) Ersatz der Spannungswandler durch Vorschaltwiderstände.

Die Schaltung wurde durch diejenige von Fig. 7, der Spannungswandler also durch den Vorschaltwiderstand R_1 ersetzt. Außerdem

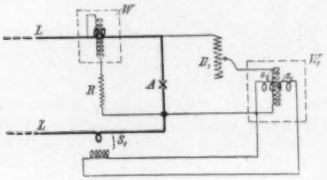

Fig. 7.

waren Vorkehrungen getroffen, daß der Betrieb von Fig. 7 mit Vorschaltwiderstand rasch in denjenigen von Fig. 5 mit Spannungswandler[1]) umgeändert werden konnte. Die Größe von R wurde so gewählt, daß das Wattmeter W_1 mit dem Vorschaltwiderstand R_1 bei sinusförmigem Strom und sinusförmiger Spannung genau so hätte zeigen müssen wie mit dem Spannungswandler. Der Lichtbogen A war ein solcher mit unsymmetrischen Elektroden und demnach starker Gleichstromkomponente der Bogenspannung.

Der Erfolg war:

Abweichung von W_1 mit Vorschaltwiderstand R_1 gegenüber W = 0,3 Proz.,

Abweichung von W_1 mit Spannungswandler gegenüber W = 8,3 Proz.

also Differenz in beiden Fällen 8 Proz.

Zur Kontrolle wurde nun der Hochspannungslichtbogen A durch einen anderen von ungefähr derselben Leistung ersetzt, bei dem aber die Gleichstromkomponente der Bogenspannung kaum merklich war, und es wurde wieder die Abweichung zwischen den Angaben von W und W_1 einmal mit Vorschaltwiderstand und dann mit Spannungswandler ermittelt. Die Differenz zwischen beiden Fällen betrug nun nur 0,6 Proz.

6. Die Auffassung, daß die Gleichstromkomponente der Bogenspannung die Hauptschuld an den unrichtigen Resultaten der Messung mit Strom- und Spannungswandlern trägt, hat sich auch sonst in jeder Beziehung bestätigt.

Nachdem die Ursache dieser Erscheinung erkannt ist, bieten sich die verschiedensten Mittel, um den dadurch entstandenen Fehler zu beseitigen. Welches Mittel man in jedem Falle wählt, hängt in erster Linie von technischen Gesichtspunkten ab. Es gelingt durch diese Mittel auch bei der Schaltung von Fig. 1, die Fehler auf wenige Prozente herabzudrücken. Wo freilich unter allen Umständen eine Genauigkeit von mindestens 1 Proz. garantiert werden muß, ist bei der Messung des Energieverbrauchs in Hochspannungslichtbogen die Verwendung von elektrodynamischen Wattmetern, deren Stromspule unmittelbar in die Starkstromleitung einzuschalten ist und deren Spannungsspule induktionsfreie Widerstände vorgeschaltet werden müssen (vgl. W Fig. 5 u. 7[1])), unerläßlich.

Ich möchte die Gelegenheit benützen, um denjenigen Herren, die mich bei den Versuchen, welche zur Aufklärung der oben besprochenen Verhältnisse unternommen wurden, in liebenswürdiger Weise unterstützt haben, den Herren Hähnle, Leutz, Dr. Vollmer und besonders Herrn Direktor Heßberger, meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

1) Aber ohne die Gleichstrommaschine M und das Gleichstrominstrument G von Fig. 5.

1) Über die Vorsichtsmaßregeln, die dabei eventuell zu beachten sind, vgl. J. Zenneck, diese Zeitschr. **11**, 896, 1910 und **12**, 208, 1911.

Ludwigshafen a. Rh., Physikalisches Laboratorium der Badischen Anilin- und Sodafabrik.

(Eingegangen 20. März 1911.)

Einige Zahlen zu der neuen von Herrn Bernoulli aufgestellten Beziehung zwischen den optischen Konstanten und dem Eigenpotential der Metalle.

Von Vsevolod Fréedericksz.

In dieser Zeitschrift **11**, 1173, 1910 stellt Herr Bernoulli eine neue empirische Beziehung zwischen den optischen Konstanten der Metalle und ihrer Stellung in der Voltaschen Spannungsreihe auf. Da ich Gelegenheit gehabt habe, die Dispersion und Absorption einiger Metalle zu untersuchen und damit die Natur dieser Erscheinungen etwas näher kennen zu lernen, so möchte ich hier einige Zahlen mitteilen, welche ein Urteil über die Zuverlässigkeit des neuen Gesetzes gestatten.

Nach Herrn Bernoulli soll die Größe

$$\frac{\omega}{n} = \frac{\operatorname{cotg}^3\varphi \sin 4\psi}{n},$$

wo n die Valenz, φ den Haupteinfallwinkel, ψ das Hauptazimut bezeichnen, bei konstanter Wellenlänge für verschiedene Metalle in einer linearen Beziehung mit dem, gegen eine Wasser-

Tabelle:

λ	*Mn* 7; +1,07	*Zn* 2; +0,76	*N*: 8; +0,23	*Co* 4; +0,23	*Bi* 5; −0,23	*Cu* 6; −0,34	*Hg* 2; −0,78	*Ag* $^1/_2$; −0,81	*Au* 3; −1,11	*Pt* 2; −0,89
589	110	150	155	188	228	250	273	288	308	314
	132γ)	242β)	149α)	188α)	402β)	247α)	268β)	285α)	305β)	502β)
508	192	317	192	233	516	508	353	611	512	594
441	303	559	283	298	668	642	463	1123	743	733
325	883	1191	678	748	1765	1170	1245	140800	1809	1862

stoffelektrode gemessenen Eigenpotentiale stehen. Herr Bernoulli benutzt bei Aufstellung dieser Beziehung optische Konstanten für das Natriumlicht; doch ist nach ihm dabei „die Wahl der Wellenlänge $\lambda = 589$ eine rein zufällige", da die Größe $\frac{\omega}{n}$ nur eine geringe Dispersion besitze[1]).

In der obigen Tabelle habe ich die Werte von $\frac{\omega}{n}$ für einige Metalle, wo genügende Beobachtungen vorliegen, bei mehreren verschiedenen Wellenlängen aufgeführt. In derselben sind die Metalle (deren Symbolen die von Herrn Bernoulli angenommenen Valenzen n und Eigenpotentiale beigefügt sind) nach den steigenden von Bernoulli für Natriumlicht gefundenen Werten von $\frac{\omega}{n}$ geordnet. Die erste Zeile gibt diese letzteren Werte; in der zweiten stehen die von mir berechneten Werte für $\lambda = 588$ oder $589\,\mu\mu$ mit Angabe des betreffenden Beobachters[2]). Der Unterschied zwischen den Bernoullischen und meinen Zahlen kommt daher, daß Bernoulli und ich zur Berechnung der Größe $\frac{\omega}{n}$ verschiedene Beobachtungen verwendet haben. Dort, wo dieser Unterschied bedeutend wird, erhielt ich die Zahlen von Bernoulli, wenn ich die Beobachtungen von Drude statt der von mir in der Tabelle angegebenen benutzte. Die 3., 4. und 5. Zeile geben die Werte von $\frac{\omega}{n}$ für $\lambda = 508$, $\lambda = 441$ und $\lambda = 325\,\mu\mu$.

Die Dispersion der Zahlen für $\frac{\omega}{n}$ ist hiernach keineswegs klein, und von der Bernoullischen Regel, die mit den neuen Zahlen schon für $\lambda = 589\,\mu\mu$ keineswegs glänzend stimmt, bleibt bei den anderen Wellenlängen nichts übrig.

1) A. L. Bernoulli, diese Zeitschr. **11**, 1173, 1910.
2) α) R. Minor, Ann. d. Phys. **10**, 581, 1903; β) W. Meier, Ann. d. Phys. **31**, 1017, 1910; γ) V. Frédericksz, Ann. d. Phys. 1911 (im Druck).

Göttingen, Februar 1911.

(Eingegangen 4. März 1911.)

Über den behaupteten inversen Kräftezusammenhang zwischen Elektro- und Hydrodynamik.

Von Hans Witte.

§ 1.

Vor kurzem habe ich an anderer Stelle[1]) eine Zusammenfassung meiner einzelnen Arbeiten über den „Äther" gegeben. Diese Arbeiten hatten mittels Durchprüfen sämtlicher auf dem Grunde der Maxwell-Lorentzschen Theorie und der allgemein anerkannten Grundgesetze der Mechanik denkbaren Äthertheorien den Nachweis geliefert, daß sich auf jenen, durch die Erfahrung gestützten Grundlagen der Äther als unhaltbar erweist, solange man an der — allein physikalisch begründeten — Annahme seines kontinuierlichen Aufbaues festhält; sie waren damit auf einem gänzlich abweichenden Wege zu demselben entschiedenen Verzicht auf den Äther gekommen, den die moderne Elektrodynamik seither als erstes Erfordernis der Relativitätstheorie erkannt hat.

Im folgenden will ich unter Bezugnahme auf die in jener zusammenfassenden Arbeit wiedergegebene allgemeine Methode eine mit den dort behandelten allgemeinen Fragen lose zusammenhängende Spezialfrage kurz besprechen.

Gerade heutzutage, wo man in den mechanischen Analogien nicht mehr Wesenserklärungen, sondern nur noch unvollkommene Bilder sehen kann, hat die Sonderfrage ein erhöhtes Interesse, wieweit diese der Natur der Sache nach unvollkommenen Bilder denn wenigstens in denjenigen Punkten getreu sind, welche für didaktisch verwendbare Modelle, zu Demonstrationszwecken usw. in erster Linie in Betracht kommen. Für solche Zwecke wird es sich immer wieder besonders um die sinnlich wahrnehmbaren Kräfte handeln, welche von den elektromagnetischen Feldern — im Bilde vom Äther — auf die ponderable Materie ausgeübt werden; wenn sich hydrodynamische usw. Felder angeben ließen, die auf eingebettete Körper gerade solche Kräfte ausüben, wie sie in diesem oder jenem Teilgebiete der Elektrodynamik nachgewiesen sind, so

1) Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik **7**, 205 bis 261, 1910.

wäre das trotz der allgemeinen Unmöglichkeit einer vollständigen mechanischen Erklärung doch jedenfalls ein sehr beachtenswerter Erfolg.

Indessen ist, wie ich in den erwähnten allgemeinen Arbeiten bereits bemerkt habe, ein derartiger Erfolg den mechanischen Bildern bisher nur in sehr geringem Maße beschieden gewesen; praktisch verwendbare hydrodynamische usw. Modelle, welche die gewünschten, den Maxwell-Lorentzschen direkt analogen ponderomotorischen Kräfte mit Sicherheit zu demonstrieren gestatten, sind überhaupt noch nicht aufgefunden worden. Dagegen hat nun neuerdings, hauptsächlich gestützt auf die bekannten Theorien und Versuche von C. A. Bjerknes, eine gänzlich andersartige, auf den ersten Blick höchst überraschende Behauptung bezüglich des Zusammenhanges zwischen den ponderomotorischen Kräften in den elektrodynamischen und den entsprechenden hydrodynamischen Feldern die Aufmerksamkeit der Physiker auf sich gezogen. Die Behauptung lautet in der weitestgehenden Form: daß lückenlos ein inverser Zusammenhang bestehe; d. h. es sollen die allgemeinsten, in der Hydrodynamik usw. auf eingebettete Körper wirkenden ponderomotorischen Kräfte Glied für Glied entgegengesetzt gleich denen sein, die nach der Maxwellschen Elektrizitätstheorie in den entsprechenden allgemeinsten elektromagnetischen Feldern auftreten müssen. Über den gegenwärtigen Stand dieses letztgenannten Spezialproblems einen orientierenden Überblick zu geben, beabsichtigen die folgenden Zeilen.

Nach Erledigung der Überschau werde ich in möglichster Kürze den endgültigen Abschluß einer Diskussion[1]) anfügen, die zwischen Herrn V. Bjerknes und mir über eine Teilfrage aus dem Bereiche dieses Problems geführt worden ist[2]).

1) H. Witte, Ann. d. Phys. **30**, 337—348, 1909; V. Bjerknes, Ann. d. Phys. **31**, 312—324, 1910; H. Witte, Ann. d. Phys. **32**, 382—410, 1910; V. Bjerknes, Ann. d Phys. **33**, 839—844, 1910.

2) Ich bedaure, daß ich genötigt bin, auf diese Teilfrage, die nach meinem Dafürhalten schon durch den ersten Aufsatz jener Diskussion hinlänglich geklärt war, noch ein drittes Mal ausdrücklich einzugehen; um so mehr, als jetzt aus formellen Gründen der Abschluß der Diskussion nicht an demselben Orte erscheinen kann, wo die Diskussion bisher geführt worden ist.

Um einer fruchtlosen weiteren Ausdehnung jener Diskussion nach Möglichkeit vorzubeugen, sei mir gleich hier erlaubt, zu bemerken, daß ich mich auf eine fernere Fortsetzung nur dann einlassen könnte, wenn bezüglich des in Betracht kommenden Spezialproblems (Kelvin-V. Bjerknesscher Äther mit den behaupteten Inverskräften, s. u.) sachlich neue Gesichtspunkte vorgebracht werden sollten. Über die von Herrn V. Bjerknes angerührten Fundamentalfragen nach dem physikalischen Weltbilde und sonstigen prinzipiellen Fragen der Physik weiter zu diskutieren, scheint mir unnütz, weil eine Einigung darüber bei der Verschiedenheit der Standpunkte wohl nicht zu erwarten steht.

§ 2.

Unterwirft man die soeben absichtlich in größter Allgemeinheit formulierte Behauptung, es bestehe zwischen Elektrodynamik und Hydrodynamik bezüglich der Kräfte ein lückenloser inverser Zusammenhang, einer näheren Betrachtung, so zeigt sich sofort, daß sie einen bestimmten Inhalt erst dann hat, wenn hinzugefügt wird, welche der vielen von vornherein denkbaren mechanischen Analogien oder Bilder dabei ins Auge gefaßt werden soll. Je nach der Natur des betreffenden mechanischen Bildes hat offenbar die Behauptung einen ganz verschiedenen Charakter. Ist im mechanischen Bilde etwa das elektrostatische Feld ein Spannungszustand im Äther, beruhend auf den Verdrehungen der Ätherteilchen, so wird der mathematische Ausdruck für die mechanische Kraft in der Analogie ein ganz anderer sein, als wenn die Analogie einen auf Verdichtungen und Verdünnungen beruhenden Spannungszustand voraussetzt; er wird wieder ein ganz wesensverschiedener werden, wenn demselben elektrostatischen Felde translatorische Ätherströmungen entsprechen sollen, usf.

Es ist wohl kaum zu erwarten, daß die unendlich vielen von vornherein denkbaren mechanischen Analogien sämtlich die Eigenschaft des inversen Kräftezusammenhanges aufweisen sollten; um so weniger, als sie sich ja — wenn sie auch das eine miteinander gemeinsam haben, daß sie schließlich mit der Maxwellschen Theorie alle unvereinbar sind — doch in sehr verschiedener Richtung und in sehr verschieden hohem Grade von der in jener Theorie niedergelegten Erfahrung entfernen. Tatsächlich ist denn auch die Behauptung des inversen Zusammenhanges nur für wenige ganz bestimmte Bilder aufgestellt worden. Will man nun einen allgemeinen Überblick gewinnen, so muß man naturgemäß den Gesamtbereich aller denkbaren Analogien durchgehen, um so jede einzelne Ätherтheorie, bei der die Behauptung des inversen Zusammenhanges vorliegt, in ihrer Beziehung zur Gesamtheit zu erkennen und dann an ihrem gehörigen Orte auf die vorgelegte Spezialfrage hin durchprüfen zu können. Die dazu erforderliche Bestimmung des Gesamtbereiches aller denkbaren Ätherтheorien, Analogien usw. liegt in den eingangs erwähnten allgemeinen Ätherarbeiten fertig vor[1]); es ist also nur mehr nötig, daß die sämtlichen dort aufgefundenen und allgemein diskutierten Gattungen von Möglichkeiten daraufhin durchgemustert werden, wo sich die Frage nach dem inversen Zusammenhange bisher erhoben und welche Resultate sie

1) U. a. auch diese Zeitschr. **7**, 779—785, 1906.

dort gezeitigt hat. Diejenigen Stellen, an denen sie nicht aufgetreten ist, bleiben natürlich einfach offen; denn es verspricht keinen Nutzen, die an und für sich schon undurchführbaren Äthertheorien noch mit der weiteren Schwierigkeit zu belasten, die nun einmal in der Forderung des inversen Zusammenhanges liegt; die offenen Stellen sollen eben nur als solche markiert werden, damit sich ein geordneter Überblick ergibt.

§ 3.

Zunächst erlaube ich mir aber, noch eine Vorbemerkung einzufügen, um einem möglichen Mißverständnisse vorzubeugen.

Es wurde soeben angedeutet, daß in allen Fällen die Behauptung des inversen Zusammenhanges nur eine Schwierigkeit mehr für die ja an und für sich schon nirgends mit der Erfahrung völlig übereinstimmenden mechanischen Bilder darbietet. Das ist unmittelbar einzusehen.

Angenommen nämlich, es sei gelungen, wirklich bei irgendeiner mechanischen Analogie das Vorhandensein derartiger Drucke als notwendig bezw. als möglich nachzuweisen, daß eine resultierende Kraft $\mathfrak{R}$ erhalten wird, von der ein Teil $\mathfrak{R}_m$ [1]) genau Glied für Glied entgegengesetzt gleich der (natürlich in die mechanischen Ausdrücke der Analogie übersetzt zu denkenden) Maxwellschen ponderomotorischen Gesamtkraft

$$+\mathfrak{A} = +\frac{1}{4\pi}\cdot\mathfrak{E}\cdot\operatorname{div}(\varepsilon\cdot\mathfrak{E}) - \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{8\pi}\cdot\mathfrak{E}^2\cdot\operatorname{grad}\varepsilon - \frac{1}{4\pi}\cdot[\operatorname{curl}\mathfrak{E}, \varepsilon\mathfrak{E}] \\ + \frac{1}{8\pi}\cdot\mathfrak{H}^2\cdot\operatorname{grad}\mu - \frac{1}{4\pi}\cdot[\operatorname{curl}\mathfrak{H}, \mu\mathfrak{H}] \end{array}\right\} \quad (1)$$

ist, wobei $\mathfrak{E}$ die elektrische, $\mathfrak{H}$ die magnetische Feldstärke, ε die Dielektrizitätskonstante und μ die magnetische Permeabilität bedeutet. Dann wirkt in der Analogie also der Äther auf das betreffende Volumelement mit einer Kraft $\mathfrak{R}_m$, die der Kraft $+\mathfrak{A}$ gerade entgegengesetzt ist, nämlich er übt pro Volumeinheit des Äthers die Kraft

$$-\mathfrak{A} = -\frac{1}{4\pi}\cdot\mathfrak{E}\cdot\operatorname{div}(\varepsilon\cdot\mathfrak{E}) + \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{8\pi}\cdot\mathfrak{E}^2\cdot\operatorname{grad}\varepsilon - \frac{1}{4\pi}\cdot[\operatorname{curl}\mathfrak{E}, \varepsilon\mathfrak{E}] \\ + \frac{1}{8\pi}\cdot\mathfrak{H}^2\cdot\operatorname{grad}\mu - \frac{1}{4\pi}\cdot[\operatorname{curl}\mathfrak{H}, \mu\mathfrak{H}] \end{array}\right\} \quad (2)$$

aus, während die wirklich an der ponderablen Materie bezw. den Elektronen beobachtete Kraft eben die Kraft $+\mathfrak{A}$ ist. Soll also die Analogie wenigstens in dieser Beziehung (absolut kann sie es ja nie) vollständig sein — und man muß doch von einer Analogie, die irgendeine, sei es heuristische, sei es auch nur didaktische Bedeutung beanspruchen will, zum wenigsten erwarten, daß sie nicht bezüglich der allerbekanntesten und allersichersten Tatsachen, nämlich eben der Bewegungen der sichtbaren Materie, gerade das Gegenteil von dem aussagt, was wirklich erfahrungsgemäß geschieht — soll also die Analogie in dieser Beziehung vollständig sein, so muß eine weitere Hypothese hinzugefügt werden: daß nämlich die mechanische Kraft $\mathfrak{R}_m = -\mathfrak{A}$ eine unmittelbare Wirkung nur auf das an der betreffenden Stelle befindliche, der sinnlichen Wahrnehmung entzogene Ätherelement ausübt, daß aber, sobald in dieselbe Stelle ein Volumelement ponderabler Materie eingebettet wird, vermöge eines in der Grenzschicht von Äther und Materie tätigen Umkehrungsmechanimus mittels einer Art von Rückstoß[1]) das allein wahrnehmbare eingebettete Teilchen ponderabler Materie genau den richtungs- und zahlenmäßig entgegengesetzten Antrieb erfährt, wie das vorher ebenda allein vorhanden gedachte Ätherteilchen. Es müßte also in einer von mir vorgeschlagenen Ausdrucksweise die Inverskraft $\mathfrak{R}_m = -\mathfrak{A}$ nur eine nicht wahrnehmbare „ätheromotorische" Kraft sein, die wahrnehmbare ponderomotorische Kraft würde richtig $+\mathfrak{A}$, vermöge des Umkehrungsmechanismus.

Nun liegt aber in der Hypothese eines solchen Umkehrungsmechanismus offenbar eine ganz ungemein große Schwierigkeit. Um einen ungefähren Begriff von ihr zu geben, gestatte ich mir, an ein schon a. a. O. angeführtes vergleichendes Beispiel nochmals zu erinnern.

Man wende auf ein in Wasser befindliches Korkkügelchen die bekannte Stevinsche Überlegung an. In einem mit Wasser gefüllten, ruhenden, nur der Schwerkraft unterworfenen Gefäße denke man sich zunächst eine Wasserkugel von der Größe eines Kubikzentimeters abgegrenzt, dann wirkt auf sie ein nach oben gerichteter Auftrieb, der dem Gewichte von einem Gramm entspricht und durch das entgegengesetzt gleiche Gewicht der Kugel kompensiert wird. Darauf bringe man an dieselbe Stelle eine Korkkugel von derselben Größe und dem vorher anderweitig bestimmten Gewichte von etwa $^1/_4$ Gramm. Dann würde, wenn man

1) Ein erster Teil ist selbstverständlich im allgemeinen vorweg abzuspalten, denn es muß doch bei Bewegungen des Äthers auch die Beschleunigung (das „Feld") durch die Drucke geliefert werden; die gesamte Resultierende $\mathfrak{R}$ der Spannungen zerfällt allgemein in zwei Teile $\mathfrak{R}_f$ und $\mathfrak{R}_m$, $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_f + \mathfrak{R}_m$, von denen der erste das Feld liefert, der zweite die mechanische (hier behauptetermaßen inverse) Kraft. Die Indizes f und m deuten auf diese Zweiteilung hin.

1) Einer „Reflexwirkung" (V. Bjerknes).

das Wasser mit dem Äther, das Korkkügelchen mit der eingebetteten ponderablen Materie vergleicht, in diesem Beispiel die Forderung eines in der Grenzfläche zwischen Wasser und Korkkugel wirkenden Umkehrungsmechanismus keine geringere als die sein, daß der Mechanismus den Auftrieb von einem Gramm in die entgegengesetzte Kraft verwandelt und das Korkkügelchen mit einer einem Gewichte von $^5/_4$ Gramm entsprechenden Kraft zu Boden sinken macht.

Das Beispiel bedarf keines Kommentars; ich brauche und will auch nicht den Versuch machen, gewissermaßen ein Maß für die enorme Größe der Schwierigkeit abzuschätzen, ich bemerke nur, daß Herr V. Bjerknes selber schon in seiner ersten Gegenschrift den noch nicht gefundenen Umkehrungsmechanismus allgemein mit dem Einschalten eines Zahnrades auf eine Linie stellt — welche unabsehbare Komplikation allein das für die mechanische Analogie bedeuten würde, liegt auf der Hand — und daß das wirkliche Auffinden eines solchen Umkehrungsmechanismus nicht einmal in derartigen einfachsten Fällen, wie das soeben besprochene vergleichende Beispiel einen darstellt, bisher geleistet worden ist. Diese Fundamentalschwierigkeit besteht also in der bezeichneten Weise ganz allgemein für jede Analogie, die den inversen Kräftezusammenhang behaupten will, neben ihren sonstigen Widersprüchen mit der Erfahrung im vollen Umfange bis auf den heutigen Tag.

In der folgenden Überschau will ich nun aber ganz ausdrücklich von dieser Fundamentalschwierigkeit absehen. Es wird also ausschließlich die Rede sein von der Behauptung selber, daß der Kräftezusammenhang eben vermöge der im Äther wirkenden Drucke ein inverser sei, daß also die Ätherdrucke und -spannungen als mechanische („ätheromotorische") Resultante $\mathfrak{R}_m$ die durch Beziehung (2) dargestellte Kraft $-\mathfrak{R}$ ergeben sollen; dagegen bleibt jene Fundamentalschwierigkeit eines nachträglich noch aufzufindenden Umkehrungsmechanismus für die ponderomotorische Wirkung völlig dahingestellt. —

§ 4.

Ich ziehe nun die in § 1 und § 2 erwähnte exakte Bestimmung des Gesamtbereiches aller auf dem Grunde der Maxwellschen Theorie und der Grundgesetze der Mechanik denkbaren Ätherheorien, Analogien usw. heran.

Wie in den früheren Arbeiten ausführlich hergeleitet worden ist, kann das Gesamtgebiet zunächst erschöpfend in zwei Hauptabteilungen, A und B, zerlegt werden. Die Abteilung A umfaßt alle Ätherheorien, bei denen die elektrische Energie W_e und die magnetische Energie W_m jede einheitlich durch eine einzige, sei es kinetische, sei es potentielle, mechanische Energie gedeutet werden soll. Die Abteilung B enthält den Rest, d. h. alle diejenigen Ätherheorien, die mindestens eine der beiden Energien W_e und W_m durch mehrere, mindestens zwei, wesensverschiedene mechanische Energieformen zu erklären beabsichtigen (z. B. den elektrostatischen [Potential-] Teil der elektrischen Energie W_e durch Spannungsenergie, z. B. auf Ätherverdichtungen und -verdünnungen beruhend, den dynamischen Teil derselben elektrischen Energie W_e durch die kinetische Energie der Ätherströmung). Jede der beiden Hauptabteilungen A und B läßt sich dann wieder erschöpfend weiter zerlegen, und zwar so, daß sich eine bis zu einem gewissen Grade symmetrische Einteilung ergibt. Es zerfällt nämlich die Abteilung A in drei Gattungen, gekennzeichnet durch die Abkürzungen

(1)	(2)	(3)
pot., pot.	kin., kin.	kin., pot.

und Abteilung B entsprechend in die weiteren drei Gattungen

(4)	(5)	(6)
zwei, pot.	zwei, kin.	zwei, zwei.

Dabei bedeuten die Abkürzungen pot. bezw. kin., daß die betreffende eine (einerlei, ob die elektrische oder die magnetische, die Stellung ist gleichgültig) der beiden elektromagnetischen Energien W_e und W_m im mechanischen Bilde einheitlich potentiell bezw. einheitlich kinetisch aufgefaßt wird; das Wort zwei, daß die betreffende eine der beiden Energien W_e und W_m in der mechanischen Analogie in zwei wesensverschiedene Teile gespalten erscheint.

Es sei nun gestattet, bezüglich einer Äußerlichkeit noch an das allgemeine Ergebnis der früheren, an diese Einteilung angeschlossenen grundsätzlichen Untersuchung über die Durchführbarkeit der sechs Gattungen zu erinnern. Die gewählte äußere Anordnung hatte dem Allgemeinergebnis eine besonders übersichtliche äußere Form gegeben: Die sechs Gattungen (1) bis (6) waren so geordnet, daß, wie die Untersuchung erwies, die Widersprüche mit der Maxwellschen Theorie, den Grundgesetzen der Mechanik und der Fundamentalvoraussetzung eines kontinuierlichen Aufbaues des reinen Äthers in einem von innen nach außen wachsenden Grade vorlagen; sie waren nämlich bei den beiden äußersten Gattungen (1) und (6) am allergrößesten, d. h. also zunächst bei (1) und (6) größer als bei den nächstinneren (2) und (5), schließlich aber auch bei diesen Gattungen (2) und (5) wieder größer als bei den in der Mitte stehenden Gattungen (3) und (4), was schon darin zum Ausdruck kam, daß hauptsächlich

diese beiden innersten Gattungen (besonders Gattung 3) zu ausgedehnten Analogiebildungen Anlaß gegeben hatten. Es ist von vornherein zu erwarten, daß der in der gewählten Anordnung besonders klar hervorgetretene allgemeine Wertunterschied zwischen den einzelnen sechs Gattungen sich auch bei der Überschau bezüglich der hier vorliegenden Spezialfrage nach dem inversen Kräftezusammenhang geltend machen wird.

§ 5.

Die Überschau selber gestaltet sich nach diesen Vorbereitungen äußerst einfach und ergibt ein im Hinblick auf die letzte Bemerkung besonders leicht verständliches Ergebnis.

Das Resultat bezüglich der beiden äußersten Gattungen (1) und (6) kann gleich mit demjenigen zusammengefaßt werden, das die zwei nächstinneren Gattungen (2) und (5) aufweisen. Alle diese vier Gattungen (1), (2), (5), (6) fallen für die Frage nach dem inversen Kräftezusammenhang ganz aus. Weder die beiden von vornherein unwahrscheinlichsten Gattungen (1) und (6), noch auch die beiden anderen, (2) und (5), bei denen die Widersprüche mit den Fundamentaltatsachen und -voraussetzungen immerhin nicht so sehr zutage lagen wie bei (1) und (6), sind so weit entwickelt worden, daß die Behauptung des inversen Zusammenhanges überhaupt hätte diskutiert werden können. Sie sind nämlich allesamt gescheitert, noch ehe überhaupt die allgemeine Frage nach den ponderomotorischen Kräften im Äther — die ja, ganz abgesehen von der weitergehenden Spezialbehauptung, daß der Zusammenhang gerade ein inverser sei, immer das letzte und wichtigste Endproblem der mechanischen Erklärung darstellt — in Angriff genommen worden ist.

Es bleiben also auch bei dem Spezialproblem des inversen Kräftezusammenhanges, genau wie bei der früheren allgemeinen Durchführbarkeitsuntersuchung, die innersten Gattungen (3) und (4) als die beiden einzigen übrig, die eingehend besprochen werden müssen.

§ 6.

Die Übereinstimmung geht aber sogar noch weiter. Auch hier scheidet, genau wie in der allgemeinen Untersuchung, die Gattung (4) auf dem verhältnismäßig kürzeren Wege aus.

In der allgemeinen Untersuchung hatte sich ergeben, daß sich die gesamte Gattung (4) schließlich auf eine einzige Theorie reduzieren läßt. Das ist diejenige Äthertheorie, die den Magnetismus einheitlich auf die Ätherverdrehungen, den dynamischen Anteil der elektrischen Energie auf die Bewegungen des Äthers und den statischen Anteil derselben elektrischen Energie auf einen eigentümlichen Spannungszustand zurückführen will, der mit Verdichtungen und Verdünnungen des Äthers in bestimmter Weise zusammenhängt. Diese Theorie ist auf einem Teilgebiete, nämlich in der durch eben diesen eigenartigen Spannungszustand charakterisierten Elektrostatik, zur Entscheidung über die vom Äther ausgeübte ponderomotorische (ätheromotorische) Kraft gelangt. Sie hat für die Kraft zwischen zwei Ätherelementen, in denen sich je ein Elektron befindet, einen bestimmten eindeutigen Wert geliefert. Der Wert war nicht der Maxwell-Coulombsche, vielmehr ergab sich eine ganz andere Potenz des Abstandes r, nämlich die vierte, während das Vorzeichen dasselbe war wie bei Coulomb und Maxwell[1]). Mithin konnte hier von Inversion keine Rede sein, denn ein inverser Zusammenhang hätte erstens gefordert, daß die r-Potenz die gleiche, und zweitens, daß das Vorzeichen das entgegengesetzte gewesen wäre. Für die Behauptung, daß ein allgemeiner inverser Kräftezusammenhang bestände, kommt daher auch die Gattung (4) nicht in Betracht.

§ 7.

Was jetzt, nach dem Ausscheiden auch der Gattung (4), übrig bleibt, ist allein die eine Gattung (3) (kin., pot.). Nur diese eine einzige Gattung steht schließlich für die Behauptung des inversen Zusammenhanges noch offen.

Es versteht sich freilich von selbst, daß durch dieses Isoliertsein des Problems auf eine einzige Gattung an und für sich die Behauptung des inversen Kräftezusammenhanges noch nicht unwahrscheinlicher gemacht wird. Wenn der inverse Zusammenhang auch nur bei einer einzigen Theorie dieser letzten Gattung wirklich als Glied für Glied vorhanden nachweisbar ist, so hat die Überschau eben doch das Ergebnis geliefert, daß diese eigentümliche Art des Zusammenhanges, wenn auch nur bei einer einzigen Theorie einer speziellen Gattung, sicher existiert; und es mag nochmals daran erinnert werden, daß gerade diese letzte Gattung (3), die von den Energien W_e und W_m die eine kinetisch, die andere potentiell deuten will, ja von jeher für die der Wirklichkeit relativ noch am nächsten kommende angesehen worden ist.

Die Gattung (3) zerfiel auf dem Grunde der Maxwellschen Gleichungen unter Berücksichtigung der Fundamentalvoraussetzung der kontinuierlichen Struktur des reinen Äthers[2]) in

1) H. Witte, Ann. d. Phys. (4) **26**, 288 ff., 1908.

2) Bei den atomistischen Theorien (Maxwell, Boltzmann) haben sich, soweit sie daraufhin durchgerechnet sind, immer nur die direkten Kräfte ergeben, nie die inversen.

zwei Untergruppen, I und II, deren jede sich schließlich auf je eine einzige Theorie zusammenziehen ließ. In der ersten wird die elektrische Energie W_e potentiell, die magnetische Energie W_m kinetisch gedeutet, und zwar ist die elektrische Feldstärke proportional der doppelten Ätherdrehung $\mathfrak{u}$, die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ proportional der Äthergeschwindigkeit $\dot{\mathfrak{q}}$; die Untergruppe II deutet umgekehrt W_e kinetisch und W_m potentiell, indem sie $\mathfrak{E}$ mit $\dot{\mathfrak{q}}$ und $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{u}$ proportional annimmt. Bezeichnet man in gewohnter Weise die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Störungen im leeren Raume, oder gemäß der Sprache des mechanischen Bildes im „reinen Äther" mit c, die unbekannte Dichte des Äthers mit k, schließlich Dielektrizitätskonstante und magnetische Permeabilität wieder mit ε und μ, so lauten die Definitionsgleichungen der beiden Untergruppen explizite:

Untergruppe I:

$$\mathfrak{E} = \alpha_{\mathrm{I}} \cdot \mathfrak{u}\,, \tag{3}$$

$$\mathfrak{H} = \beta_{\mathrm{I}} \cdot \dot{\mathfrak{q}}\,, \tag{4}$$

Untergruppe II:

$$\mathfrak{E} = \beta_{\mathrm{II}} \cdot \dot{\mathfrak{q}}\,, \tag{5}$$

$$\mathfrak{H} = \alpha_{\mathrm{II}} \cdot \mathfrak{u}\,, \tag{6}$$

wobei die α und β skalare Konstanten sind, die nur von ε, μ, c und der hypothetischen Ätherdichte k abhängen.

Von den beiden Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ muß schon den Maxwellschen Gleichungen zufolge einer polar und einer axial sein; die Untergruppe I deutet die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$, die Untergruppe II die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ als polaren Vektor, ein Unterschied, der dem bekannten Gegensatze in der früheren, elastischen Optik entspricht: Neumann-MacCullagh auf der einen, Fresnel auf der anderen Seite.

Die der Untergruppe I angehörenden Deutungsversuche sind die älteren. Lord Kelvin, der Vater der neueren kontinuierlichen Äthertheorien, hat sie zum Ausgangspunkte seiner Untersuchungen gemacht; er selber hat aber nicht versäumt, darauf hinzuweisen, daß schon Euler das magnetische Feld durch Strömungen eines Mediums längs der Magnetkraftlinien hatte erklären wollen. In neuerer Zeit hat man indessen die Untergruppe I — abgesehen von dem später geführten Unmöglichkeitsbeweise, der beide Untergruppen trifft — zugunsten der jüngeren Untergruppe II deswegen fallen lassen müssen, weil der Beweis erbracht wurde, daß die polare Natur dem elektrischen Vektor $\mathfrak{E}$ und nicht dem magnetischen Vektor $\mathfrak{H}$ zukommt[1]).

Indessen will ich mich auch hier nicht auf die Untergruppe II — die also im elektrischen Felde Strömungen voraussetzt und die Elektronen durch Ätherquellen und -senken erklärt — beschränken, sondern, ähnlich wie in meinen allgemeinen Unmöglichkeitsbeweisen die Untergruppe I gleichfalls behandelt worden ist, auch hier anführen, was in ihr bezüglich des inversen Kräftezusammenhanges vorliegt. Ich tue das hier noch aus einem besonderen Grunde; es kann nämlich der Kernpunkt der am Schluß noch zu besprechenden Diskussion nicht wohl verständlich gemacht werden, bevor nicht der Gegensatz zwischen den Untergruppen I und II gerade in dieser Beziehung scharf herausgearbeitet ist. Ich gehe getrennt zuerst in § 9 die Untergruppe I, dann in § 10 die Untergruppe II auf die Behauptung des inversen Kräftezusammenhanges hin durch.

§ 8.

Vorher muß ich im Zusammenhang mit der Gattung (3) noch von einer Teilanalogie sprechen, welche die Übereinstimmung mit den Maxwellschen Gleichungen nicht absolut, sondern nur für passend definierte Mittelwerte erfüllt und daher außerhalb der hier vorausgesetzten erfahrungsmäßigen Grundlagen steht. Sie hat auch niemals beansprucht, mehr zu sein, als eben nur eine Analogie im eigentlichen, keine mechanische Erklärung prätendierenden Sinne des Wortes, zumal sie sich nur auf einen ganz festbegrenzten Teil aus dem Gesamtgebiete der elektromagnetischen Erscheinungen bezieht. Dafür weist sie aber in höchst bemerkenswerter Weise in diesem Teilgebiete exakt den inversen Kräftezusammenhang auf. Ich meine die berühmten „pulsierenden Körper" von C. A. Bjerknes.

Das Teilgebiet, dem die Erscheinungen der pulsierenden Körper zuzuordnen sind, kann sowohl die reine Magnetostatik wie auch die reine Elektrostatik sein. Wählt man die erste (der axialen Natur der magnetischen Vektoren natürlich nicht genügende) Art der Zuordnung, so entsprechen die pulsierenden Körper ruhenden Magnetpolen bezw. Magneten, die Oszillationen des umgebenden Mediums fallen überall in die Richtung der magnetostatischen Kraftlinien, ihre Größe bezw. ihre Geschwindigkeit ergibt sich dadurch, daß die mittlere kinetische Energie der Oszillationsbewegung an jeder Stelle der magnetostatischen Energie proportional ist. Bei der zweiten Zuordnungsweise treten die pulsierenden Körper an die Stelle der elektrostatischen Ladungen, das umgebende Medium oszilliert überall in der durch die elektrostatischen Kraftlinien vorgezeichneten Richtung und mit einer Geschwindigkeit, die durch die Identität der mittleren kinetischen mit der elektrostatischen Energie

1) F. Koláček, Wied. Ann. 55, 503, 1895; M. Abraham, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften IV. C. 14, 39 ff. Leipzig 1901.

bedingt wird. Bei passender Definition der Mittelwerte kann man auch sagen, daß die Durchschnittsgeschwindigkeit jeweils der betreffenden Feldstärke proportional ist, also im ersten Falle der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}$, im zweiten der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$. Berücksichtigt man also diese Mittelwerte, so hat man in jedem der beiden Fälle zwischen den magnetostatischen bezw. elektrostatischen Feldern einerseits und den oszillierenden hydrodynamischen Feldern anderseits vollkommene geometrische Analogie. Dagegen erweist sich nun aber in mechanischer Beziehung die Analogie als vollständig und exakt invers. Die auf die eingebetteten pulsierenden Körper von dem oszillierenden Medium ausgeübten Kräfte sind vollständig und exakt die umgekehrten, wie sie die Magnete bezw. die elektrischen Ladungen in den geometrisch entsprechenden magneto- bezw. elektrostatischen Feldern nach der Maxwellschen Theorie bezw. dem Coulombschen Gesetze erfahren: gleichartig pulsierende Körper ziehen einander an, ungleichartig pulsierende stoßen einander ab usw. Beide Tatsachen, sowohl die bei geeigneter Mittelwertdefinition hervortretende direkte geometrische Analogie als auch die durchgängige inverse Analogie bezüglich der ausgeübten Kräfte, sind theoretisch durch eingehende Rechnung klargelegt und außerdem durch mannigfache und sehr vielseitige Experimente unzweifelhaft bewiesen worden.

Es ist nicht zu verwundern, daß diese auffallenden Erscheinungen in hohem Maße das Interesse der Physiker erregt haben, und daß gerade sie der Anlaß geworden sind, auch bei ganz anders gearteten und weiter reichenden mechanischen Bildern derartige inverse Zusammenhänge zu vermuten. Von diesem letzteren Einflusse wird sogleich noch bei den Untergruppen I und II der Gattung (3) die Rede sein. Auf die pulsierenden Körper selber (auch an die von ihnen ausgegangenen Gravitationstheorien sei noch erinnert) näher einzugehen, darf ich wohl nach den obigen Ausführungen über die fest begrenzte Reichweite dieser Teilanalogie unterlassen. Ich verweise bezüglich der vielen in dem bezeichneten Gebiete durchgeprüften und immer wieder die charakteristische Inversion zeigenden theoretischen und experimentellen Einzelheiten auf die Veröffentlichungen von C. A. und V. Bjerknes.

§ 9.

Ich kehre nun zu der eigentlichen Aufgabe zurück und bespreche zunächst die mit dem polaren $\mathfrak{H}$ belastete, historisch ältere Untergruppe I.

Auch bezüglich der Behauptung des inversen Kräftezusammenhanges steht die Untergruppe I historisch an erster Stelle, und zwar ist Lord Kelvin derjenige gewesen, von dem hier zuerst eine derartige Behauptung aufgestellt und der zugehörige Beweis geliefert worden ist. Beides bezieht sich allerdings nur auf die reinen Bewegungszustände, d. h. also, da der Ätherbewegung in dieser Untergruppe I der Magnetismus, die Elektrizität dagegen der Ätherdrehung entsprechen soll, nur auf rein magnetostatische Felder. Für die rein elektrischen oder gar für die gemischten Felder hat Lord Kelvin weder die Behauptung erhoben noch den Beweis erbracht.

Eine eingehende Darstellung des Gedankenganges hat Lord Kelvin in seiner Arbeit gegeben: „Über die Bewegung fester Körper in einer Flüssigkeit, welche durch Öffnungen in ihnen oder in einem ruhenden festen Körper wirbelfrei zirkuliert“[1]). (Die wirbelfreie Flüssigkeits-[Äther-]Bewegung entspricht dem magnetischen Felde, die porösen festen Körper sind die Magnete, die Poren die Aus- und Eintrittsstellen der Kraftlinien.) Lord Kelvin stellt die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen auf und gelangt unter Beachtung des zyklischen Charakters der Flüssigkeitsbewegungen zu gewissen, noch ziemlich komplizierten allgemeinen Schlußformeln, die aber sofort eine sehr einfache Gestalt annehmen, sobald die porösen Körper sämtlich als ruhend vorausgesetzt werden. Bezeichnet man mit Lord Kelvin eine verallgemeinerte Hamiltonsche Lagenkoordinate der eingebetteten Körper mit ψ, die zugehörige Hamiltonsche Kraftkomponente mit Ψ und die kinetische Energie der zyklischen irrotationalen Bewegung mit $\mathfrak{L}$, so nehmen die Gleichungen, die jetzt natürlich Gleichgewichtsbedingungen werden, die Form an

$$\Psi = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \psi},$$

wobei die Differentiation die Hamiltonsche ist, d. h. bei konstanten Momenten vorzunehmen. Diesen Ausdruck $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \psi}$ liefern die Gleichungen also als Wert derjenigen Kraft, die von außen wirken muß, damit die porösen Körper in Ruhe bleiben; ein Ergebnis, das Lord Kelvin sofort durch Berufung auf das Energieprinzip plausibel macht: es ist nämlich die Vermehrung der gesamten Energie $\mathfrak{L}$, die durch eine unendlich kleine Verrückung $\delta\psi$ hervorgebracht wird, selbstverständlich

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \psi} \cdot \delta\psi,$$

1) Phil. Mag. (4) **45**, 332—345, 1873; vergl. auch Papers on Electrostatics and Magnetism, S. 567 ff., 1872, u. a. m.

andererseits ist aber die entsprechende, von der äußeren Kraft Ψ geleistete Arbeit

$$\Psi \cdot \delta\psi$$

und diese beiden Ausdrücke müssen einander natürlich gleich sein.

Die von dem Medium selbst auf die eingebetteten porösen Körper ausgeübte Kraft ist ihrerseits der Kraft Ψ, welche eben wirken muß, damit die Körper nicht in Bewegung geraten, in gewohnter Weise entgegengesetzt gleich. Sie wird also, wenn man zunächst vom Vorzeichen absieht, ebenfalls durch die Operation

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \psi}$$

gefunden, also durch Differentiation der Feldenergie nach der betreffenden allgemeinen Koordinate.

Nun bleibt, damit diese letztere Kraft tatsächlich als invers zu der ihr entsprechenden magnetischen ponderomotorischen Kraft nachgewiesen wird, nur noch der eine letzte entscheidende Schritt zu tun: es muß das Vorzeichen der Kraft bestimmt werden.

Das kann offenbar in jedem speziellen Falle ganz einfach so geschehen: man gehe etwa wieder von der äußeren Kraft Ψ aus und untersuche, ob die Feldenergie Ω, die natürlich bekannt sein muß, bei einer in bestimmtem Sinne erfolgenden Veränderung der zugehörigen Koordinate ψ, also z. B. bei einer Vergrößerung von ψ, zu- oder abnimmt. Ist das erstere der Fall, wird also mit wachsendem ψ die gesamte Feldenergie Ω größer, so ist die von der Kraft Ψ geleistete Arbeit positiv, d. h., um die Koordinate ψ wachsen zu lassen, muß von außen Arbeit geleistet werden; sich selber überlassen, muß sich also der Körper so bewegen, daß die Koordinate ψ abnimmt. Kurz gesagt: wenn einem Wachstum der Koordinate ψ eine Zunahme der Feldenergie Ω entsprechen würde, ist das Vorzeichen der vom Felde ausgeübten Kraft dahin zu bestimmen, daß sie die Koordinate ψ zu verkleinern strebt; wenn umgekehrt ein Wachstum der Koordinate ψ eine Abnahme der Feldenergie Ω nach sich zieht, dann sucht die vom Felde ausgeübte Kraft die Koordinate ψ zu vergrößern. (Drückt man die Schlußfolgerung in dieser Weise aus, so ist ihre Notwendigkeit unmittelbar zu ersehen, das Gegenteil wäre energetisch unmöglich.)

Lord Kelvin wendet diesen Gedankengang selber auf einen Spezialfall, und zwar den nächstliegenden, an. Nur diesen Spezialfall will ich eingehend besprechen, da ich die gesamte Untergruppe I ja wesentlich deswegen heranziehe, um den notwendigen Kontrast gegenüber der Untergruppe II für die zuletzt zur Besprechung gelangende Diskussion herausarbeiten zu können, und dieser Spezialfall für jenen Zweck ausschlaggebend ist. Ich merke nur nebenbei an, daß Lord Kelvin für den allgemeinen Beweis, daß der Kräftezusammenhang in dieser magnetisch-hydrodynamischen Analogie invers sei, noch eine andere Schlußweise andeutet; er beruft sich nämlich darauf, daß derselbe Ausdruck

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \psi},$$

der hier in der Analogie allgemein die auf die porösen Körper, also auf die Magnetpole, wirkende Kraft darstelle, in den wirklichen Magnetfeldern zufolge einem von ihm selbst in einer früheren Arbeit[1]) gelieferten Beweise gerade diejenige Kraft bedeute, die auf einen an dieselbe Stelle gebrachten diamagnetischen Körper wirken würde. —

Der von Lord Kelvin betrachtete und durchgerechnete Spezialfall ist nun der, daß die durchströmten Körper zwei unendlich lange und unendlich dünne Röhren sind, von denen nur die in der Endlichkeit befindlichen Aus- bezw. Einströmungsenden in Betracht kommen. Das ist also dasjenige hydrodynamische Feld, welches dem magnetostatischen Felde zweier unendlich langer und unendlich dünner Stabmagnete entspricht, die in der bezeichneten Weise angeordnet sind. Es werde nun angenommen, die beiden im Endlichen befindlichen Pole bezw. Ein- oder Ausströmungsenden seien gleichnamig bezw. -artig, d. h. die Pole etwa beide Nordpole, die Röhrenenden etwa beide Ausströmungsenden. Dann stoßen bekanntlich die beiden Magnetpole einander nach dem Coulombschen Gesetze ab; soll also der inverse Zusammenhang herauskommen, so müssen die beiden Ausströmungsenden einander nach demselben Gesetze anziehen, d. h. was das Vorzeichen anlangt: ihre Entfernung r muß durch die Wirkung des Feldes verkleinert werden; und damit das wiederum in der hydrodynamischen Analogie möglich und notwendig ist, muß in dem hydrodynamischen Bilde die gesamte Energie Ω der zyklischen Bewegung bei zwangsweiser Vergrößerung der Entfernung r wachsen.

Dieses erforderliche Wachstum der hydrodynamischen Feldenergie gewinnt Lord Kelvin nun folgendermaßen: er bemerkt, daß die Energie der Strömung außerhalb der Röhren allerdings nicht wächst, sondern im Gegenteil abnimmt; daß aber diese Abnahme wieder kompensiert werde durch eine notwendigerweise mit ihr verknüpfte Zunahme der Strömungsenergie im Inneren der Röhren, und daß diese

1) Papers on Electrostatics and Magnetism, § 724 bis 730, 1872.

Zunahme der Energie in den Röhren gerade doppelt so groß sei wie die Abnahme der Energie außerhalb; auf diese Weise komme insgesamt doch das für den inversen Zusammenhang unbedingt nötige Wachstum der Gesamtenergie heraus. Lord Kelvin macht, wie ich betone, auf diese Tatsache, daß das Innere der Röhren herangezogen werden muß, selber ganz ausdrücklich aufmerksam; nur dadurch, daß die Röhren selbst mit ihrer Energiekompensation vorhanden sind, ergibt sich die behauptete inverse Kraft.

Ich werde auf diese Tatsache nachher zurückkommen.

Bezüglich der Untergruppe I habe ich nur noch anzufügen, daß der inverse Zusammenhang in dieser magnetisch-hydrodynamischen Analogie noch weiter untersucht worden ist von Herrn V. Bjerknes, der auf einem ganz anderen Wege — nämlich von den in § 8 besprochenen Untersuchungen seines Vaters C. A. Bjerknes über pulsierende Körper — zu demselben Probleme gekommen war. Ich hebe hervor seine Versuche, die Anziehung und Abstoßung von Röhrenenden experimentell nachzuweisen, die aber nach Herrn V. Bjerknes' eigener Angabe infolge der Instabilität der hydrodynamischen Felder teilweise unklare Resultate geliefert haben; ferner die Auseinandersetzung über Körper ohne Poren, die von Ein- oder Ausströmungsstellen angezogen werden und absolut diamagnetischen Körpern entsprechen (weil keine Stromlinien durch sie hindurchgehen); schließlich den wichtigen experimentellen Nachweis, daß bei rotierenden Zylindern, die eine drehende Flüssigkeitsbewegung um sich herum erzeugen und damit bezüglich des magnetischen Feldes stationären galvanischen Strömen entsprechen, die Inverskraft existiert: Zylinder, die gleichsinnig rotieren, stoßen einander ab, in entgegengesetztem Sinne rotierende Zylinder ziehen einander an, entsprechend der Anziehung gleichgerichteter und der Abstoßung entgegengesetzt gerichteter Ströme.

Dies ist das Äußerste, was in der magnetisch-hydrodynamischen Analogie der Untergruppe I erreicht worden ist. Ich bemerke, daß sich die nachher zu besprechende Diskussion mit Herrn V. Bjerknes nicht gegen diese soeben erwähnten Dinge richtet, sondern nur gegen das, was jetzt in der Untergruppe II kommt. Ich gehe nun zu der Untergruppe II über.

§ 10.

Die Untergruppe II ist, wie schon oben ausgeführt, die wichtigste Äthertheoriengruppe überhaupt, vertreten durch die bekannteste Äthertheorie Lord Kelvins, seinen quasirigiden oder gyrostatischen Äther. Aus den Grundvoraussetzungen

$$\mathfrak{E} = \beta_{II} \cdot \dot{\mathfrak{q}} \qquad (5)$$

$$\mathfrak{H} = \alpha_{II} \cdot \mathfrak{u} \qquad (6)$$

ergibt sich in großen Zügen das folgende Bild: In der Elektrostatik strömt der Äther längs der elektrischen Kraftlinien in wirbelfreier zyklischer Bewegung, die Elektronen sind Quell- und Sinkstellen des im übrigen vollkommen inkompressiblen Mediums; in den magnetostatischen Feldern ruht der Äther, er ist um jede magnetische Kraftlinie verdreht, die potentielle Ätherenergie oder die magnetostatische Energie ist die Energie der Verdrehungen der Ätherteilchen gegenüber ihrer Ruhelage; bewegte Elektronen geben Kombinationen der beiden soeben geschilderten Erscheinungen, Strömung und Verdrehung; elektromagnetische Schwingungen führen zu der Auffassung Fresnels (während die Untergruppe I den Anschauungen von Neumann und Mac Cullagh entsprach).

Bezüglich dieser Untergruppe II ist nun Herr V. Bjerknes derjenige gewesen, der behauptet hat, daß der inverse Kräftezusammenhang bestehe, und zwar Glied für Glied bei den einfachsten statischen wie bei den allerallgemeinsten dynamischen elektromagnetischen Feldern[1]). Die Behauptung lautet: die nach Voraussetzung von Herrn V. Bjerknes in dem Medium herrschenden Drucke und Spannungen

$$\left.\begin{aligned}
X_x &= -\frac{1}{2}k\cdot\dot{\mathfrak{q}}^2 - \frac{1}{2}h\cdot\mathfrak{u}^2 + h\cdot\mathfrak{u}_x^2,\\
X_y &= +h\cdot\mathfrak{u}_z + h\cdot\mathfrak{u}_x\cdot\mathfrak{u}_y,\\
X_z &= -h\cdot\mathfrak{u}_y + h\cdot\mathfrak{u}_x\cdot\mathfrak{u}_z;\\
Y_x &= -h\cdot\mathfrak{u}_z + h\cdot\mathfrak{u}_y\cdot\mathfrak{u}_x,\\
Y_y &= -\frac{1}{2}k\cdot\dot{\mathfrak{q}}^2 - \frac{1}{2}h\cdot\mathfrak{u}^2 + h\cdot\mathfrak{u}_y^2,\\
Y_z &= +h\cdot\mathfrak{u}_x + h\cdot\mathfrak{u}_y\cdot\mathfrak{u}_z;\\
Z_x &= +h\cdot\mathfrak{u}_y + h\cdot\mathfrak{u}_z\cdot\mathfrak{u}_x,\\
Z_y &= -h\cdot\mathfrak{u}_x + h\cdot\mathfrak{u}_z\cdot\mathfrak{u}_y,\\
Z_z &= -\frac{1}{2}k\cdot\dot{\mathfrak{q}}^2 - \frac{1}{2}h\cdot\mathfrak{u}^2 + h\cdot\mathfrak{u}_z^2,
\end{aligned}\right| \qquad (7)$$

ergeben als „ätheromotorischen" Teil $\mathfrak{R}_m$ der gesamten Resultierenden $\mathfrak{R}$ die Inverskraft $-\mathfrak{A}$ (vergl. oben § 3, Gleichung 2):

$$-\mathfrak{A} = -\frac{1}{4\pi}\cdot\mathfrak{E}\cdot\operatorname{div}(\varepsilon\cdot\mathfrak{E}) + \left|\begin{array}{l} \frac{1}{8\pi}\cdot\mathfrak{E}^2\cdot\operatorname{grad}\varepsilon - \frac{1}{4\pi}\cdot[\operatorname{curl}\mathfrak{E},\ \varepsilon\mathfrak{E}] \\ + \frac{1}{8\pi}\cdot\mathfrak{H}^2\cdot\operatorname{grad}\mu - \frac{1}{4\pi}\cdot[\operatorname{curl}\mathfrak{H},\ \mu\mathfrak{H}] \end{array}\right|.$$

1) V. Bjerknes, Versuch einer mechanischen Deutung der Maxwellschen Gleichungen. Arkiv för Matematik,

oder in der Sprache der Analogie[1]) gemäß den Beziehungsgleichungen (5) und (6):

$$-\mathfrak{A} = -\dot{\mathfrak{q}}\cdot\operatorname{div}(k\cdot\dot{\mathfrak{q}}) + \left|\begin{array}{l} \frac{1}{2}\cdot\dot{\mathfrak{q}}^2\cdot\operatorname{grad}k - [\operatorname{curl}\dot{\mathfrak{q}}, k\dot{\mathfrak{q}}] \\ +\frac{1}{2}\cdot(h\mathfrak{u})^2\cdot\operatorname{grad}\left(\frac{1}{h}\right) - [\operatorname{curl}h\mathfrak{u}, \mathfrak{u}] \end{array}\right| \quad (8)$$

Herrn V. Bjerknes haben als eine gewisse Stütze für diese Behauptung die schon mehrfach erwähnten pulsierenden Körper seines Vaters C. A. Bjerknes vorgelegen. Das Bindeglied ist die Elektrostatik. Demselben elektrostatischen Felde entsprechen bei den pulsierenden Körpern die Mittelwerte der oszillierenden Bewegungen in Richtung der Kraftlinien, bei dem Kelvinschen Äther der Untergruppe II die wirbelfreien stationären Strömungen längs eben derselben Kraftlinien; es stehen also die beiden hydrodynamischen Felder, einerseits das oszillierende und anderseits das stationäre Feld, in einer sehr engen Beziehung zueinander, sie sind, sobald bei dem oszillierenden die Mittelwerte gebildet werden, gewissermaßen identisch. Es liegt daher gewiß der Gedanke nicht fern, es könnte dieselbe Identität auch für die von eben diesen beiden hydrodynamischen Feldern ausgeübten Kräfte stattfinden. Daß die Kräfte der von C. A. und V. Bjerknes untersuchten oszillierenden Felder zu den wirklichen elektrostatischen Kräften invers sind, steht fest, so würde der Gedanke einer Identität der beiden hydrodynamischen Kräfte besagen, daß auch der Kelvinsche quasirigide Äther zum wenigsten in der Elektrostatik ebenfalls die zu den wirklich beobachteten inversen Kräfte liefern sollte.

Ich will allerdings bezüglich dieser gewissermaßen apriorischen Begründung noch einen Umstand hervorheben, der sonst noch nicht erwähnt worden ist, mir aber doch bemerkenswert erscheint. Nach der von Herrn V. Bjerknes selber in den Kraftfeldern gegebenen Herleitung für die Inverskraft bei den pulsierenden Körpern müßte eigentlich der inverse Charakter eben dieser Kraft gar nicht absolut bindend sein, er könnte verschwinden und sogar in den exakt entgegengesetzten (d. h. die „direkte") Kraftwirkung verkehrt worden, wenn die Trägheitsänderungen des Inhaltes der pulsierenden Trommeln usw. eine Rolle spielen (was sie bei der Bjerknesschen Luftfüllung, den Holzkugelversuchen und dergl. nicht tun). Infolgedessen würde auch die Vermutung bezüglich der Kelvinschen Theorie an Wahrscheinlichkeit verlieren. Sie ist ja aber überhaupt nur eben eine Vermutung; ich habe sie nur deswegen angeführt, um klarzustellen, daß jedenfalls ein engerer Zusammenhang von vornherein nicht besteht. —

Nun zu der Frage, ob wirklich gemäß der Behauptung von Herrn V. Bjerknes in dem Kelvin-Bjerknesschen Äther der Untergruppe II die Inverskraft (8)

$$-\mathfrak{A} = -\dot{\mathfrak{q}}\cdot\operatorname{div}(k\cdot\dot{\mathfrak{q}}) + \left|\begin{array}{l} \frac{1}{2}\cdot\dot{\mathfrak{q}}^2\cdot\operatorname{grad}k - [\operatorname{curl}\dot{\mathfrak{q}}, k\dot{\mathfrak{q}}] \\ +\frac{1}{2}\cdot(h\mathfrak{u})^2\cdot\operatorname{grad}\left(\frac{1}{h}\right) - [\operatorname{curl}h\mathfrak{u}, \mathfrak{u}] \end{array}\right|$$

existiert oder nicht.

Für die Beantwortung der Frage ist vorweg zu bemerken, daß es sich wesentlich um das erste Glied handelt,

$$-\dot{\mathfrak{q}}\cdot\operatorname{div}(k\cdot\dot{\mathfrak{q}}),$$

also dasjenige Glied, welches in den elektrischen Vektoren

$$-\frac{1}{4\pi}\cdot\mathfrak{E}\cdot\operatorname{div}(\varepsilon\cdot\mathfrak{E})$$

lautet und demnach die (inverse) rein elektrostatische Kraft auf solche Stellen bezeichnet, an denen sich elektrostatische Ladungen bzw. Elektronen befinden. Das Glied ist schon deswegen das wichtigste, weil gerade dieses Glied dasjenige ist, für welches die Invers-Anziehungen und -Abstoßungen der pulsierenden Kugeln als Vergleich oder Stütze hatten dienen sollen; überdies sind von den vier übrigen Gliedern zwei, nämlich die beiden letzten

$$+\frac{1}{2}\cdot(h\mathfrak{u})^2\cdot\operatorname{grad}\left(\frac{1}{h}\right)$$

und

$$-[\operatorname{curl}h\mathfrak{u}, \mathfrak{u}],$$

nach Form und Vorzeichen völlig willkürlich, weil über die ihnen zugrunde liegenden Spannungen willkürlich verfügt worden ist[1]), und die beiden anderen

$$+\frac{1}{2}\cdot\dot{\mathfrak{q}}^2\cdot\operatorname{grad}k$$

und

$$-[\operatorname{curl}\dot{\mathfrak{q}}, k\dot{\mathfrak{q}}]$$

sind in mathematischer Beziehung durch den „synthetischen" Gedankengang gestützt, den Herr V. Bjerknes selber für zwar anschaulich, aber unscharf erklärt[2]).

Astronomi och Fysik **4**, Nr. 3, 1907; ferner „Die Kraftfelder" (Die Wissenschaft, Heft 28), Braunschweig, Vieweg 1909.

1) Die skalare Konstante k in den Gleichungen (7) und (8) ist eine Abkürzung für einen aus ε, μ, c und k bzw. den Proportionalitätsfaktoren α_{II} und β_{II} zusammengesetzten Ausdruck, der ein Maß für den Widerstand des Äthers gegen Verdrehungen darstellt.

1) V. Bjerknes, Die Kraftfelder, S. 168 f.

2) V. Bjerknes, Die Kraftfelder, S. 123, vergl. auch S. 119, 121, 142 usf.

Die Antwort auf die Frage hat nun gelautet, daß gerade das erste Glied

$$-\dot{\mathfrak{q}} \cdot \operatorname{div}(k \cdot \dot{\mathfrak{q}})$$

tatsächlich durch die von Herrn V. Bjerknes zugrunde gelegten Drucke (7) nicht geliefert wird.

Es konnte auch schon in der Darstellung von Herrn V. Bjerknes, wie sich weiter nachweisen ließ, dieser Umstand überall genau verfolgt werden, nur trat er dort nicht auf den ersten Blick deutlich hervor; es war nämlich in den V. Bjerknesschen Ätherbewegungsgleichungen ein Glied von ganz anderer physikalischer Bedeutung (nämlich ein durch Transformationen abgespaltener Teil der linken Gleichungsseite, also des Produktes aus Masse und Beschleunigung), jedoch von derselben äußeren Form

$$\dot{\mathfrak{q}} \cdot \operatorname{div}(k \cdot \dot{\mathfrak{q}})$$

einfach auf die rechte Gleichungsseite geschafft und in die Lücke hineingesetzt worden. Daß tatsächlich das Glied

$$-\dot{\mathfrak{q}} \cdot \operatorname{div}(k \cdot \dot{\mathfrak{q}})$$

in der Druckresultante $\mathfrak{R}$ fehlt, kann man aber jederzeit verifizieren, indem man mittels der bekannten Beziehungen

$$\mathfrak{R}_x = -\frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z}$$

$$\mathfrak{R}_y = -\frac{\partial Y_x}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{\partial Y_z}{\partial z}$$

$$\mathfrak{R}_z = -\frac{\partial Z_x}{\partial x} - \frac{\partial Z_y}{\partial y} - \frac{\partial Z_z}{\partial z}$$

aus den Drucken (7) die Resultante $\mathfrak{R}$ ausrechnet.

Merkwürdigerweise ließ sich schließlich unter Berücksichtigung der Grundvoraussetzungen des Kelvin-Bjerknesschen Äthers der Beweis sogar noch erweitern: es ist auch durch Zusatzhypothesen, also durch Änderung des Ansatzes (7) für die Drucke und Spannungen im Medium, unter keinen Umständen möglich, nachträglich das gewünschte elektrostatische Inversglied

$$-\dot{\mathfrak{q}} \cdot \operatorname{div}(k \cdot \dot{\mathfrak{q}})$$

zu gewinnen.

Gerade an der entscheidenden Stelle besteht demnach bei dem Kelvin-Bjerknesschen Äther der Untergruppe II der behauptete inverse Zusammenhang nicht. Das ist das Ergebnis bezüglich der Untergruppe II.

Der Beweis ist in den erwähnten Arbeiten geliefert worden[1]), Herr V. Bjerknes hatte ihn in seiner ersten Gegenschrift allerdings infolge eines Mißverständnisses anfechten zu sollen geglaubt[1]), in seiner „zweiten Antwort" aber hat er ihn unberührt stehen lassen[2]). —

Im Anschluß an den Hinweis auf die teilweise Willkürlichkeit des V. Bjerknesschen Druckansatzes füge ich die Bemerkung an, daß ich selber schon früher gerade für die elektrostatische Kraft im Kelvinschen Äther Spannungen angegeben hatte, die nicht die inverse, sondern die direkte Kraft liefern[3]), und daß ich jetzt in der Diskussion mit Herrn V. Bjerknes auf die Möglichkeit aufmerksam gemacht habe, auch für die allgemeinsten dynamischen Felder durch einen passend gewählten allgemeinen Spannungsansatz ebenfalls die direkten Kräfte, und zwar vollständig, zu gewinnen.

§ 11.

Das Gesamtergebnis der orientierenden Überschau über das Problem des inversen Kräftezusammenhanges ist danach dieses.

Von den sechs denkbaren Gattungen von Äthertheorien kommt nur die Gattung (3) in Betracht, welche die eine der beiden elektromagnetischen Energien kinetisch, die andere potentiell deutet.

Innerhalb des Rahmens dieser Gattung (3) sind zunächst die pulsierenden Körper anzuführen, deren oszillierende Felder in der Tat in den Mittelwerten den inversen Kräftezusammenhang aufweisen, aber nur innerhalb entweder der Elektrostatik oder der Magnetostatik.

Bezüglich der beiden Untergruppen bezw. Theorien I und II, in welche die Gattung (3) ausmündet, liegen folgende Resultate vor:

In der älteren Untergruppe I (die freilich wegen des in ihr vorausgesetzten polaren $\mathfrak{H}$ der Wirklichkeit am fernsten steht) ist das Vorhandensein des inversen Zusammenhanges teilweise durch Rechnung erhärtet, nämlich für statische Magnetkraftlinien (stationäre Ätherströmungen), und überdies in einzelnen Fällen experimentell bewiesen worden, nämlich für absolut diamagnetische Körper, stationäre galvanische Ströme und, allerdings nicht vollständig, auch für lange Stabmagnete (vom Äther durchströmte Röhren). Ob er aber noch weiter geht, ob er sich auf alle elektromagnetischen Erscheinungen erstreckt, steht noch dahin (vielleicht würde die Entscheidung darüber bis zu einem gewissen Grade willkürlich bleiben, wegen der Möglichkeit, den Ätherdrucken und -spannungen hypothetische Zusatzglieder hinzuzufügen).

1) H. Witte, Ann. d. Phys. **30**, 339 ff., 1909; **32**, 393 ff., 1910.

1) V. Bjerknes, Ann. d. Phys. **31**, 318 ff., 1910.
2) V. Bjerknes, Ann. d. Phys. **33**, 839—844, 1910.
3) H. Witte, Mechanische Erklärung der elektrischen Erscheinungen, S. 86, Berlin 1906.

Bei der jüngeren Untergruppe II (Kelvin-V. Bjerknes, $\mathfrak{C}$ polar) hat sich dagegen bereits jetzt ein bestimmtes, und zwar negatives, Resultat ergeben: hier hat sich an entscheidender Stelle, nämlich in der Elektrostatik, die Behauptung des inversen Zusammenhanges als unhaltbar erwiesen. — — —

§ 12.

Ich muß nun noch auf die erwähnte Diskussion mit Herrn V. Bjerknes eingehen, die sich auf den letzterwähnten Beweis bezieht, daß in dem Kelvin-Bjerknesschen Äther der inverse Zusammenhang an entscheidender Stelle, nämlich in der Elektrostatik, nicht existiert.

Daß ich mich nun zum dritten Male mit dieser Sache beschäftigen muß, würde nicht nötig sein, wenn Herrn V. Bjerknes' „Zweite Antwort" klar die Tatsache hätte erkennen lassen, daß der von mir gelieferte Beweis unerschüttert zu Recht besteht. Leider geht das aber aus Herrn V. Bjerknes' Darstellung nicht hervor, vielmehr ist sie geeignet, bei einem mit den Einzelheiten des Streites nicht vertrauten Leser eher den entgegengesetzten Eindruck zu erwecken. Ich werde darlegen, daß tatsächlich Herrn V. Bjerknes' Ausführungen nur eine neue Bestätigung meines Beweises liefern, wenn die Sache auch auf den ersten Blick nicht so aussehen mag.

13.

Ich gehe sofort auf den Kernpunkt der Polemik ein, nämlich eben auf den umstrittenen Beweis bezüglich des inversen Zusammenhanges in der Elektrostatik. Die von Herrn V. Bjerknes gewählte Darstellungsweise könnte ja allerdings noch in anderer Beziehung Anlaß zu Erörterungen geben; ich nehme aber an, daß der persönliche und subjektive Charakter, den verschiedene der dort gefallenen Meinungsäußerungen tragen, von den Lesern der Diskussion als solcher erkannt worden ist und daher nicht im einzelnen hervorgehoben zu werden braucht. So habe ich nur die sachlichen Fragen zu erörtern, also eben Herrn V. Bjerknes' Argumente gegen meinen Beweis bezüglich des fehlenden elektrostatischen inversen Kräftezusammenhanges[1]).

1) Eine einzige andere Spezialfrage ist allerdings nebenbei auch noch in der Diskussion mit behandelt worden. Das ist die Frage nach dem Drehungseinwande. Auf diese muß ich doch wenigstens anmerkungsweise eingehen, da auch hier die Darstellungsweise von Herrn V. Bjerknes das nötig macht. — Ich hatte ja am Schlusse meines ersten Aufsatzes (S. 347, Zeile 3 v. u. bis S. 348, Zeile 4 v. o.) nebenher darauf aufmerksam gemacht, daß, abgesehen von der Frage nach dem inversen Kräftezusammenhang, aus dem von mir früher an anderen Stellen ausgiebig erörterten Drehungseinwande auch noch eine weitere Schwierigkeit für die V. Bjerknessche Theorie entstehen würde. Das ist die Schwierigkeit, die ich nachher in meinem zweiten Aufsatze den „allgemeinen" Einwand genannt habe, weil sie einem viel größeren Bereiche von Theorien entgegensteht, von denen die des Herrn V. Bjerknes nur ein spezieller Sonderfall ist. Es handelt sich darum, daß die elektrostatischen Felder im mechanischen Bilde stationäre Felder sind und deshalb zu endlichen Atherverschiebungen führen müßten, bei deren Zustandekommen dann bekanntermaßen die postulierte Proportionalität der magnetischen Feldstärke mit gewissen Curl-Größen ihren mechanischen Sinn nicht behalten kann.

Gerade Herrn V. Bjerknes gegenüber hatte ich doch wohl einen ganz besonderen Anlaß, auch auf diesen „allgemeinen Einwand" — der sich also auf das Endlichwerden der Atherverschiebungen stützt — noch mit hinzuweisen. Herr V. Bjerknes möge doch nicht vergessen, daß er selber derjenige gewesen ist, der immer wieder die Physiker dazu aufgefordert hat, gewisse Einflüsse der fraglichen Bewegungen des Äthers zu suchen, aus denen dann „Schlüsse von der größten Wichtigkeit" u. ähnl. gezogen werden können sollten. Die Aufforderungen erstrecken sich sogar bis an den Schluß der ersten Erwiderung des Herrn V. Bjerknes; hier wird „die Aufmerksamkeit der Physiker" ausdrücklich „auf die Aufgabe hingelenkt", einen Einfluß jener stationären Ätherströmung im elektrostatischen Felde auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes nachzuweisen. Es bedarf wohl keiner weiteren Worte, daß an einen solchen Nachweis nur denken kann, wer das Endlichwerden der Verschiebungen geradezu voraussetzt.

Nun will Herr V. Bjerknes jetzt, in der zweiten Antwort, die Dichte des Äthers so groß annehmen, daß die Verschiebungen in den stationären Feldern bis jetzt noch nicht endlich geworden sind. Der Äther soll sich also seit Erschaffung der Elektronen (bezw. seit seiner eigenen Erschaffung) in den Feldern der Elektronen (d. h. überhaupt) noch kein endliches Stück aus der Ruhelage entfernt haben. Dieser neuen Hypothese gegenüber gebe ich gern und ohne weiteres zu, daß der Drehungseinwand, wenn Herr V. Bjerknes sich zu einer derartigen Hilfsannahme entschließt, auf die V. Bjerknessche Theorie nicht anwendbar bleibt. Wenn Herr V. Bjerknes die Voraussetzungen ändert, ändern sich die Ergebnisse mit; das versteht sich ganz von selbst.

Soviel zur Klarstellung des tatsächlichen Verhältnisses, das zwischen dem Drehungseinwande und der den Gegenstand der Diskussion bildenden V. Bjerknesschen Theorie besteht.

Bezüglich der Polemik gegen meine allgemeinen „Unmöglichkeitsbeweise", die Herr V. Bjerknes an die Möglichkeit, jene neue Hypothese einzuführen, angeknüpft hat, bemerke ich, daß die neue Hypothese für die Gültigkeit der Maxwellschen Gleichungen nur einen vorwärts und rückwärts fest begrenzten endlichen Zeitraum zuläßt und daß sie damit eben aus den von mir oft genug hervorgehobenen und begründeten natürlichen Grenzen meiner „Unmöglichkeitsbeweise" heraustritt. Im übrigen verweise ich wegen meiner Stellung zu den allgemeinen und prinzipiellen Fragen auf die Anmerkung zu § 1 dieses Aufsatzes.

Eine Widerlegung meines Beweises enthält Herrn V. Bjerknes' „Zweite Antwort", wie gesagt, nicht; was sie meinem Beweise gegenüberstellt, sind die folgenden zwei Einwände:

1. eine Berufung auf Lord Kelvin (S. 843),
2. eine Berufung auf die Experimente seines Vaters C. A. Bjerknes (S. 844, Schluß des Aufsatzes).

§ 14.

Die Berufung auf Lord Kelvin ist die folgende:

Daß bei den fraglichen gyrostatisch-hydro-

dynamischen Feldern — das sind also in der Analogie die stationären wirbelfreien Ätherströmungen zwischen den ruhenden Quellen und Senken (Elektronen) — die umstrittene inverse Anziehungs- und Abstoßungskraft tatsächlich vorhanden sei, das habe Lord Kelvin schon vor langer Zeit bewiesen. „Seit 40 Jahren hat ... das Resultat Lord Kelvins unangefochten dagestanden, daß diese Kraft existiert."

Herr V. Bjerknes beruft sich nun dabei auf dieselben Untersuchungen Lord Kelvins über die unendlich langen durchströmten Röhren, deren in § 9 der vorliegenden Arbeit bei Untergruppe I gedacht worden ist. Er führt als Beleg für die Behauptung, daß „diese Kraft" wirklich existiert, d. h. daß ruhende Quellen und Senken einander in der behaupteten, zur Elektrostatik inversen Weise anzögen, unter Bezugnahme auf jene magnetisch-hydrodynamische Analogie Lord Kelvins wörtlich folgendes aus:

„Ein Spezialfall, auf den Kelvin selbst aufmerksam macht, ist folgender: Die durchströmten Körper seien zwei unendlich lange und unendlich dünne Röhren, von welchen nur die in der Endlichkeit befindlichen Enden in Betracht kommen; diese Röhrenenden sind Zentren radialen Ein- oder Ausströmens, und sie ziehen sich an oder stoßen sich ab mit einer Kraft, entgegengesetzt gleich derjenigen, welche magnetische Pole aufeinander ausüben."

Herr V. Bjerknes erwähnt aber nicht, daß bei dieser Kelvinschen hydrodynamischen Analogie — wie schon in § 9 auseinandergesetzt wurde — gemäß den von Lord Kelvin erhaltenen Formeln und nach Lord Kelvins ausdrücklichem Hinweise eins unbedingt erforderlich ist: daß nämlich die Röhren selber vorhanden sind. Nur für wirkliche Enden von tatsächlich existierenden Röhren gilt die Herleitung, und sie kommt (vergl. § 9) nur dadurch zustande, daß die z. B. bei Annäherung gleichartiger Röhrenenden erfolgende Zunahme der kinetischen Feldenergie im umgebenden Äther — die für sich allein Abstoßung zur Folge haben würde — kompensiert wird durch eine genau doppelt so große Abnahme der kinetischen Strömungsenergie im Inneren der Röhren. Nur durch diese Energiekompensation infolge des Vorhandenseins der Röhren kommt die Anziehung gleichartiger Enden usw., also die Inverskraft, zustande. Wären die Röhren mit ihrer Energiekompensation nicht vorhanden, so würden gerade Lord Kelvins Formeln nicht die inverse, sondern die direkte Kraft ergeben.

Das bedeutet also tatsächlich Herrn V. Bjerknes' Berufung in Sachen der elektrostatischen Inverskraft bei den Quellen und Senken auf Lord Kelvin: Sie würde nur dann zu der gewünschten Rechtfertigung der elektrostatischen Inverskraft führen, wenn man die durch die Identität von Äthergeschwindigkeit und elektrischer Feldstärke $\mathfrak{E}$ geforderte mechanische Deutung der elektrostatischen Ladungen durch Quellen und Senken fallen lassen und sich statt dessen zu der neuen Hypothese entschließen könnte, daß den elektrostatischen Ladungen im mechanischen Bilde eben keine Quellen und Senken entsprächen, sondern Aus- und Einströmungsenden von irgendwo und wie **wirklich im Äther vorhandenen Röhren,** in deren Innerem eine ständige, der allgemeinen Feldrichtung entgegengesetzte Ätherströmung vorhanden sein müßte.

Eine anschaulichere Bestätigung für die von mir bewiesene Tatsache, daß die Behauptung des inversen Kräftezusammenhanges bei den nach Lord Kelvin und Herrn V. Bjerknes den elektrostatischen Ladungen entsprechenden Quellen und Senken im Äther **nicht** durchführbar ist, kann ich mir kaum wünschen. —

Ob Herr V. Bjerknes sich zu der neuen Hypothese entschließen wird oder nicht, ist für die Anerkennung der Richtigkeit meines Beweises vollkommen irrelevant. Infolge der vorausgesetzten Identität der Äthergeschwindigkeit mit der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ würde die neue Hypothese überdies mit der Erfahrung unvereinbar sein; denn sie würde in elektromagnetischer Beziehung besagen, es müßte von jeder beliebigen elektrostatischen Ladung mindestens eine ausgezeichnete Röhre ins Unendliche (oder zu entgegengesetzten Ladungen) führen, welche eine der allgemeinen Feldverteilung gerade entgegengesetzte Kraftrichtung $\mathfrak{E}$ aufweist. Die neue Hypothese als solche diskutieren zu wollen, darf ich aus beiden Gründen unterlassen.

§ 15.

Ich bin noch eine Schlußbemerkung schuldig über den zweiten Einwand von Herrn V. Bjerknes, also die Berufung auf die Experimente seines Vaters. Herr V. Bjerknes hebt gegen Ende seines Aufsatzes hervor, daß er mittels des nach meiner „Meinung" unrichtigen mathematischen Verfahrens (vergl. § 10) nicht nur die behauptete Inverskraft bei den Quellen und Senken herausgerechnet habe, sondern auch (auf der von mir in meinem zweiten Aufsatze zitierten S. 124 ff.) die bekannte inverse Anziehung und Abstoßung der pulsierenden Körper.

Hierzu genüge die Erinnerung, daß auf meiner Seite keine „Meinung" vorliegt, sondern

der von Herrn V. Bjerknes nicht widerlegte Beweis. Der zweite Einwand trifft also wieder nicht mich, sondern er enthält nur die Konstatierung der Tatsache, daß Herr V. Bjerknes eben auch für die feststehenden Ergebnisse seines Vaters nachträglich eine Erklärung angegeben hat, die sich nicht aufrecht erhalten läßt. Ich selber hatte diese Tatsache mit meinem gelegentlichen Hinweise auf S. 124 ff. absichtlich nur nebenher andeuten wollen; meine Schuld ist es nicht, daß sie jetzt durch die Schlußworte von Herrn V. Bjerknes' „Zweiter Antwort" mit ausdrücklicher Schärfe hervorgehoben wird.

Wolfenbüttel, im Februar 1911.

(Eingegangen 18. Februar 1911.)

Über die Anwendung der Thermodynamik auf die Elektronentheorie der Thermoelektrizität. II.

Von F. Krüger.

Bei der Anwendung der Thermodynamik auf die Elektronentheorie der Thermoelektrizität, wie ich sie früher[1]) in dieser Zeitschrift entwickelte, ergaben sich gewisse Schwierigkeiten, vor allem in bezug auf die zu erwartenden Potentialdifferenzen im Temperaturgefälle der Metalle; im folgenden möchte ich zeigen, wie diese Schwierigkeiten sich in einfacher Weise lösen und wie man bei einer exakten Durchführung der Rechnung unter Zugrundelegung der eingeführten Begriffe zu einer durchsichtigen Analyse der thermoelektrischen Erscheinungen gelangt.

Es sei zu dem Zweck aus dem Früheren kurz das zusammengefaßt, was für die hier zu gebende Durchführung der Theorie notwendig ist. Im folgenden wird erstens die Reversibilität der thermoelektrischen Vorgänge vorausgesetzt, in demselben Sinne, wie dies in der Theorie von W. Thomson und den meisten anderen Theorien geschieht. Aus den älteren Elektronentheorien wird die Vorstellung entnommen, daß die Metallatome zum Teil in frei bewegliche negative Elektronen und unbewegliche positive Metallionen dissoziiert sind in einem im allgemeinen von der Temperatur abhängigen Maße; ferner wird auf Grund der Elektronenaussendung aus glühenden Metallen die Annahme gemacht, daß der Konzentration der freien Elektronen im Metall bei jeder Temperatur ein gewisser Dampfdruck der Elektronen über dem Metall entspricht, der in derselben Weise von der Temperatur abhängt, wie etwa der Partialdruck der Kohlensäure über einem festen Karbonat, z. B. über Kalziumkarbonat. Für die freien Elektronen im Metall und außerhalb des Metalles sollen die Gasgesetze gelten.

Dann berechnet sich, wie ich bereits früher zeigte, die Potentialdifferenz in der Berührungsstelle zweier Metalle A und B in folgender Weise:

Wir betrachten einen Kreis, gebildet aus dem Metall A, dem Metall B, welche in einer Berührungsfläche zusammengelötet sind, und dem Vakuum. In letzterem herrsche eine Elektronenkonzentration von dem Drucke p; die Anordnung wird durch die beistehende Fig. 1 veranschaulicht.

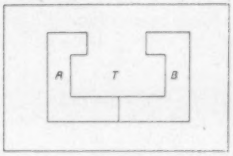

Fig. 1.

Das Ganze befinde sich auf der Temperatur T. Wir haben dann in diesem Kreise drei Potentialdifferenzen, eine in der Berührungsstelle der beiden Metalle, eine zweite an der Grenzfläche des Metalles A gegen das Vakuum und eine dritte in der Grenzfläche des Metalles B gegen das Vakuum. Beseitigt man den Voltaeffekt, der, wie besonders Greinacher[1]) auf Anregung von Warburg gezeigt hat, seinen Ursprung in dem Vorhandensein einer dünnen Flüssigkeitshaut auf den Metallen hat, so muß für den Kreis das Spannungsgesetz gelten, d. h. die Summe der drei genannten Potentialdifferenzen muß gleich Null sein. Die Potentialdifferenz an der Grenzfläche Metall-Vakuum berechnet sich nun ebenso wie die an einer Metallelektrode in der Lösung ihres Metallsalzes nach der Nernstschen Theorie: Beträgt der Elektronendampfdruck über dem Metalle A bei der Temperatur T P_a, so muß die elektrische Arbeit beim Durchgang der Elektronen durch die Potentialdifferenz am Metall A gegeben sein durch die Arbeit, welche gewonnen wird, wenn die Elektronen vom Dampfdruck P_a auf den Druck p im Vakuum gebracht werden. Wir haben also für diese Potentialdifferenz

$$E'_a = \int_p^{P_a} v\,dp$$

oder, da für die Elektronen das Boyle-Mariottesche Gesetz gelten soll,

$$E'_a = RT\int_p^{P_a}\frac{dp}{p} = RT\ln\frac{P_a}{p}$$

1) F. Krüger, diese Zeitschrift **11**, 800, 1910.

1) Greinacher, Ann. d. Phys. **16**, 708, 1905.

wenn R die sog. elektrolytische Gaskonstante bedeutet.

Ebenso ergibt sich für die Potentialdifferenz eines Metalles B gegen das Vakuum der Ausdruck

$$E'_b = RT \ln \frac{P_b}{p}.$$

Die Differenz dieser beiden Ausdrücke liefert also die Potentialdifferenz in der Berührungsstelle der beiden Metalle A und B zu

$$E' = E'_a - E'_b = RT \ln \frac{P_a}{P_b}$$

unabhängig vom Elektronendampfdruck p im Vakuum, wie das natürlich sein muß. Daß aus diesem Ausdruck für die Potentialdifferenz in der Berührungsstelle zweier Metalle das Voltasche Spannungsgesetz ohne weiteres folgt, zeigte ich bereits früher.

Ebenso wies ich in der früheren Mitteilung darauf hin, daß der prinzipielle Weg, um von diesen Formeln zu solchen zu gelangen, welche die für die thermoelektrischen Erscheinungen charakteristischen Wärmeentwicklungen enthalten, darin besteht, daß man aus den obigen Ausdrücken durch Differentiation nach der Temperatur die Temperaturkoeffizienten der Logarithmen der Dampfdrucke ableitet, welche dann durch die Formel von Clausius-Clapeyron mit der Verdampfungswärme verknüpft sind. Auf diesem Wege bekommen wir also

$$\frac{dE'}{dT} = R \ln \frac{P_a}{P_b} + RT \frac{d \ln \frac{P_a}{P_b}}{dT}.$$

Nun ist

$$R \ln \frac{P_a}{P_b} = \frac{E'}{T}.$$

Ferner folgt aus der Clausius-Clapeyronschen Formel, wie sie bei Annahme der Gültigkeit der Gasgesetze für den Dampfdruck gilt,

$$\frac{d \ln P_a}{dT} = \frac{q_a}{RT^2}$$

und

$$\frac{d \ln P_b}{dT} = \frac{q_b}{RT^2},$$

worin q_a und q_b die Verdampfungswärmen der Elektronen aus den Metallen A und B heraus bedeuten. Also ist

$$RT \frac{d \ln \frac{P_a}{P_b}}{dT} = \frac{q_a - q_b}{T} = \frac{q}{T},$$

mithin

$$\frac{dE'}{dT} = \frac{E' + (q_a - q_b)}{T} = \frac{E' + q}{T}.$$

Der Ausdruck $E' + q$ ist nun offenbar die gesamte Wärmemenge, welche absorbiert wird, wenn ein Grammolekül Elektronen aus dem Metall A verdampft und auf dem Metall B kondensiert wird, wobei gleichzeitig noch die elektrische Potentialdifferenz E' überwunden werden muß. Diese Wärmetönung besteht also aus einem elektrischen Teil E' und einem unelektrischen q, welch letzterer gleich der Differenz der Verdampfungswärme der Elektronen aus den Metallen A und B ist.

In meiner ersten Mitteilung hatte ich nun den naheliegenden Schluß gezogen, daß diese gesamte Wärmetönung $E' + q$ gleich der Peltierwärme Π sei, woraus sich dann besonders für die Potentialdifferenzen im Temperaturgefälle der Metalle Schwierigkeiten ergaben.

Dieser Schluß, daß $E' + q$ die Peltierwärme bedeutet, ist nun aber in dieser einfachen Form nicht richtig, sondern, wie die folgenden Darlegungen zeigen werden, ein wenig zu modifizieren. Die Verdampfungswärme der Elektronen aus einem Metalle (analog wie z. B. die Verdampfungswärme der Kohlensäure aus Kalziumkarbonat) setzt sich aus zwei Teilen zusammen. Sie besteht einerseits aus der Dissoziationswärme der Elektronen aus den neutralen Metallatomen innerhalb des Metalls und zweitens aus der Übergangswärme dieser freien Elektronen aus dem Innern des Metalls in das Vakuum oder den Elektronendampfraum. Die Dissoziationswärme der Elektronen im Metall A wollen wir mit q_{a_1} die Übergangswärme derselben aus diesem Metall in das Vakuum mit q_{a_2} bezeichnen; die entsprechenden Größen für das Metall B mit q_{b_1} und mit q_{b_2}. Wir haben also dann

$$q_a = q_{a_1} + q_{a_2} \text{ und } q_b = q_{b_1} + q_{b_2}.$$

Die Verdampfungswärme ist also die Summe der Dissoziations- und Übergangswärme, denn die verdampfenden Elektronen müssen zuerst im Metall von den neutralen Metallatomen abdissoziiert werden, ehe sie in den Dampfraum übergehen können.

Fließt dagegen in einem geschlossenen metallischen Kreise ein Strom negativer Elektronen, so findet an der Berührungsstelle der beiden Metalle A und B nur der Übergang freier Elektronen statt, es bewegen sich ja im elektrischen Strome nur die freien Elektronen, welche nicht erst, wie dies bei der Verdampfung der Fall ist, abdissoziiert werden müssen. Die Wärmetönung in der Grenzfläche der Metalle A und B beim Durchfließen der negativen Elektronen besteht daher einerseits aus der elektrischen Arbeit, bei der Überwindung der Potentialdifferenz in der Berührungsstelle, welche nach dem Obigen gleich

$$E' = RT \ln \frac{P_a}{P_b}$$

ist, und andererseits in der nichtelektrischen Übergangswärme der freien Elektronen $(q_{a_2} - q_{b_2})$. Diese Summe repräsentiert also die Peltierwärme, für die wir also finden

$$\Pi = E' + (q_{a_2} - q_{b_2});$$

sie ist also um den Betrag $q_{a_1} - q_{b_1}$, d. h. um die Differenz der Dissoziationswärmen der Elektronen in den Metallen A und B kleiner als die Wärmeabsorption, welche wir erhalten, wenn wir ein Grammolekül Elektronen aus dem Metall A verdampfen und nach Überwindung der hier vorhandenen Potentialdifferenzen auf dem Metalle B kondensieren.

Nun lautet die bekannte Formel von Lord Kelvin für die gesamte thermoelektrische Kraft eines geschlossenen Kreises, dessen Lötstellen sich auf den Temperaturen $T + dT$ und T befinden,

$$dE = \Pi \frac{dT}{T}.$$

Setzen wir hier für die Peltierwärme Π den abgeleiteten Wert ein, so erhalten wir

$$dE = [E' + (q_{a_2} - q_{b_2})] \frac{dT}{T}.$$

Andererseits hatten wir oben für die Differenz dE' der Potentialdifferenz der beiden Berührungsflächen der Metalle A und B, von denen sich die eine auf der Temperatur $T + dT$, die andere auf der Temperatur T befindet, den Ausdruck erhalten

$$dE' = (E' + q)\frac{dT}{T} = [E' + (q_{a_1} - q_{b_1}) + q_{a_2} - q_{b_2})]\frac{dT}{T}.$$

Die gesamte thermoelektrische Kraft dE des geschlossenen Kreises unterscheidet sich also von dieser Differenz dE' der Berührungspotentialdifferenzen an den beiden Lötstellen um den Betrag

$$(q_{a_1} - q_{b_1})\frac{dT}{T}.$$

Dieser Betrag bleibt also jetzt übrig für die Potentialdifferenzen im Temperaturgefälle der beiden Metalle. Bezeichnen wir also die Differenz dieser Potentialdifferenzen im Temperaturgefälle der beiden Metalle mit dE'', so muß sein

$$dE = dE' + dE'',$$

d. h. die gesamte thermoelektrische Kraft ist gleich der Differenz dE' der beiden Potentialsprünge in den Lötstellen bei den Temperaturen $T + dT$ und T und der Differenz dE'' der beiden Potentialdifferenzen im Temperaturgefälle.

Durch Differenzbildung erhalten wir also hier aus $dE'' = dE - dE'$ hierfür den Wert

$$dE'' = -(q_{a_1} - q_{b_1})\frac{dT}{T},$$

worin also q_{a_1} die Dissoziationswärme der Elektronen im Metalle A, q_{b_1} die im Metalle B bedeutet.

Diese letzteren Potentialdifferenzen müssen aber auch für sich allein direkt berechenbar sein. Dies gelingt auf folgende Weise. Wir betrachten einen Stab des Metalles A, dessen eines Ende sich auf der Temperatur $T + dT$, dessen anderes sich auf der Temperatur T befindet. Nun denken wir uns semipermeable Membranen, welche durchlässig sind für die Metallatome und die positiven Metallionen, undurchlässig dagegen für die negativen Elektronen. In einem aus solchen Membranen gebildeten Zylinder, dessen eine Grundfläche wie ein Stempel verschiebbar sei, denken wir uns im Metall A bei der Temperatur $T + dT$ ein Grammolekül Elektronen abgegrenzt. Diese führen wir mit Hilfe eines solchen semipermeablen Zylinders durch das Temperaturgefälle innerhalb des Metalles nach dem Ende, welches sich auf der Temperatur T befindet. Die Konzentrationen der Elektronen im Metall A, welche im allgemeinen von der Temperatur abhängen werden, mögen bei der Temperatur T c und also bei der Temperatur $T + dT$

$$c + \frac{dc}{dT} dT$$

betragen, entsprechend seien die diesen Konzentrationen zugehörigen osmotischen Drucke, welche die Elektronen auf unsere semipermeablen Membranen ausüben, π und

$$\pi + \frac{d\pi}{dT} dT.$$

Bei dem Transport unseres eingeschlossenen Grammoleküls Elektronen von der Temperatur $T + dT$ auf T müssen wir also durch Dilatation mit Hilfe des beweglichen Stempels den osmotischen Druck von dem Werte

$$\pi + \frac{d\pi}{dT} dT$$

auf π bringen, damit der Druck und die Konzentration der Elektronen mit den Werten dieser Größen bei der Temperatur T im Gleichgewichte sind; nach der Überführung in das Metall mit der Temperatur T denken wir uns die Elektronen mit den dort befindlichen positiven Metallionen wieder zu neutralen Metallatomen vereinigt. Dieser Arbeitsgewinn bei der Dilatation von dem Drucke

$$\pi + \frac{d\pi}{dT} dT$$

auf π muß der elektromotorischen Kraft äquivalent sein, welche in diesem Temperaturgefälle ihren Sitz hat. Wenn wir diese Potentialdifferenz mit dE_a'' und ferner das Volumen des eingeschlossenen Grammoleküls Elektronen mit φ bezeichnen, so haben wir also

$$dE_a'' = -\varphi \frac{d\pi}{dT} dT,$$

das negative Vorzeichen ergibt sich, falls wir dE_a'' im selben Sinne rechnen wie dE_a'. Da im Metalle das Gesetz $\varphi\pi = RT$ gelten soll, so wird

$$dE_a'' = -RT\frac{d\ln\pi}{dT}dT.$$

Für diese Dissoziation im Metalle gilt nun aber die Beziehung

$$\frac{d\ln\pi}{dT} = \frac{q_{a1}}{RT^2},$$

worin q_{a1} die gesamte Dissoziationswärme (innere Dissoziationswärme + äußere Arbeit RT) bedeutet. Für die Potentialdifferenz im Temperaturgefälle des Metalles A ergibt sich also, wenn wir dies einsetzen,

$$dE_a'' = -q_{a1}\frac{dT}{T},$$

sie ist also allein durch die Dissoziationswärme bestimmt.

Analog ergibt sich für die Potentialdifferenz im Temperaturgefälle des Metalles B der Ausdruck

$$dE_b'' = -q_{b1}\frac{dT}{T}.$$

Die Differenz dieser beiden Potentialdifferenzen im Temperaturgefälle der Metalle A und B wird also

$$dE'' = dE_a'' - dE_b'' = -(q_{a1} - q_{b1})\frac{dT}{T};$$

das ist aber gerade der Ausdruck, den die obigen Formeln verlangen.

Wir können dasselbe Resultat auch auf andere Weise ableiten. Wir denken uns einen Kreisprozeß vollzogen in der Weise, daß wir ein Grammmolekül Elektronen im Metall A bei der Temperatur $T + dT$ abdissoziieren, es dann durch das Temperaturgefälle auf die Temperatur T bringen, und hier wieder mit positiven Metallionen sich vereinigen lassen. Bringen wir dann noch einerseits das Metallstück, in dem jetzt das betrachtete Grammolekül Elektronen sich befindet, von der Temperatur T auf die Temperatur $T + dT$, und andererseits das Metallstück von demselben Volumen, in welchem wir das Grammolekül Elektronen abdissoziiert haben, umgekehrt von der Temperatur $T + dT$ auf die Temperatur T, so ist der Kreisprozeß geschlossen und alles wieder in demselben Zustande wie zu Anfang. Dieser Prozeß entspricht also sehr nahe dem von H. A. Lorentz[1]) abgeleiteten. Die bei diesem Kreisprozeß bei den verschiedenen Temperaturen absorbierten oder entwickelten Wärmemengen sind nun folgende. Durch die Dissoziation bei der Temperatur $T + dT$ wird die Wärmemenge

$$q_{a1} + \frac{dq_{a1}}{dT}dT$$

absorbiert, durch die Wiedervereinigung bei der Temperatur T die Wärmemengen q_{a1} entwickelt. Ferner wird beim Transport des Grammoleküls Elektronen, der ja einem elektrischen Strome entspricht, die Thomsonwärme $\sigma_a dT$ absorbiert,

1) H. A. Lorentz, Wied. Ann. **38**, 593, 1889.

worin die Größe σ_a von W. Thomson als „spezifische Wärme der Elektrizität" bezeichnet wird, welche, wie wir sehen werden, von der eigentlichen spezifischen Wärme der Elektrizität oder der Elektronen durchaus verschieden ist, was zuerst H. A. Lorentz (l. c.) dargelegt hat. Die Thomsonwärme setzt sich nämlich zusammen aus der elektrischen Arbeit, die bei Überwindung der Potentialdifferenz dE_a'' im Temperaturgefälle zu überwinden ist, und aus der Differenz des Wärmeinhalts der freien Elektronen bei den Temperaturen $T + dT$ und T. Wir wollen dieselben mit u_a bei der Temperatur T und entsprechend mit

$$u_a + \frac{du_a}{dT}dT$$

bei der Temperatur $T + dT$ bezeichnen, so daß sich also die Thomsonwärme darstellt in der Form

$$\sigma_a dT = dE_a'' - \frac{du_a}{dT}dT = dE_a'' - r_a dT.$$

Hierin bedeutet der Differentialquotient des Wärmeinhalts der Elektronen nach der Temperatur $\frac{du_a}{dT}$ offenbar die eigentliche spezifische Wärme r_a der Elektrizität, d. h. der freien Elektronen oder die Differenz der Wärmemengen, welche dem Metall zuzuführen sind, um es um 1 Grad zu erwärmen, wenn es in einem Falle ein Grammolekül freier Elektronen mehr enthält als im anderen Falle. Die Wärmemenge schließlich, welche in dem Schlußteil des obigen Kreisprozesses zuzuführen ist, nämlich bei der Erwärmung des Metallstückes, in das die Elektronen übergeführt sind, von der Temperatur T auf $T + dT$ und der gleichzeitigen Abkühlung des Stückes, dem sie entzogen sind, von der Temperatur $T + dT$ auf T beträgt

$$\frac{du_a'}{dT}dT,$$

worin also

$$\frac{du_a'}{dT} = r_a'$$

die spezifische Wärme der gebundenen Elektronen bedeutet. Die Anwendung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik in der Form

$$\int\frac{dQ}{T} = O$$

ergibt also, auf diesen Kreisprozeß angewandt,

$$\frac{q_{a1} + \frac{dq_{a1}}{dT}dT}{T + dT} - \frac{q_{a1}}{T} + \frac{dE_a'' - \frac{du_a}{dT}dT}{T} + \frac{\frac{du_a'}{dT}dT}{T} = O$$

oder

$$\frac{dq_{a1}}{dT} - \frac{q_{a1}}{T} + \frac{dE_a''}{dT} - (r_a - r_a') = O.$$

Nun ist aber nach dem ersten Hauptsatze

$$\frac{dq_{a1}}{dT} = r_a - r_a',$$

d. h. der Temperaturkoeffizient der Dissoziationswärme gleich der Differenz der spezifischen Wärme der Elektronen im freien und gebundenen Zustande im Metall. Beachten wir dies, so bekommen wir daher

$$\frac{dE_a''}{dT} = -\frac{q_{a1}}{T}$$

oder

$$dE_a'' = -q_{a1}\frac{dT}{T},$$

genau so wie oben.

Die Thomsonwärme besteht also ebenso wie die Peltierwärme aus einem elektrischen und einem nicht elektrischen Glied, für das Metall A war sie gleich

$$\sigma_a dT = dE_a'' - \frac{du_a}{dT}dT = dE_a'' - r_a dT,$$

worin das erste Glied auf der rechten Seite die Potentialdifferenz im Temperaturgefälle bezeichnet, deren Wert durch die Dissoziationswärme gegeben ist nach der Gleichung

$$dE_a'' = -q_{a1}\frac{dT}{T},$$

während das zweite Glied auf der rechten Seite $r_a dT$ der eigentlichen spezifischen Wärme der freien Elektronen Rechnung trägt.

Stellen wir die erhaltenen Formen kurz noch einmal zusammen, so haben wir also für die Potentialdifferenz in der Berührungsstelle der beiden Metalle A und B

$$E' = RT\ln\frac{P_a}{P_b},$$

für die Differenz zweier solcher Potentialdifferenzen bei den Temperaturen $T + dT$ und T

$$dE' = (E' + q)\frac{dT}{T} = (E' + [q_{a1} - q_{b1}] + [q_{a2} - q_{b2}])\frac{dT}{T},$$

für die Potentialdifferenzen im Temperaturgefälle der Metalle A und B

$$dE_a'' = -q_{a1}\frac{dT}{T}$$

und

$$dE_b'' = -q_{b1}\frac{dT}{T}$$

und für ihre Differenz

$$dE'' = dE_a'' - dE_b'' = -(q_{a1} - q_{b1})\frac{dT}{T}.$$

Die gesamte thermoelektrische Kraft setzt sich zusammen aus der Differenz der beiden Potentialsprünge in den Lötstellen und der beiden Potentialsprünge im Temperaturgefälle der beiden Metalle, also ist

$$dE = dE' + dE''.$$

Setzen wir unsere Ausdrücke für dE' und für dE'' hierin ein, so ergibt sich die Thomsonsche Grundgleichung

$$dE = \Pi\frac{dT}{T}$$

als direkte Folgerung. Wir hatten nämlich gefunden für die Peltierwärme den Ausdruck

$$\Pi = E' + (q_{a2} - q_{b2}),$$

ferner für die Thomsonwärme im Metalle A

$$\sigma_a dT = d\Gamma_a'' - r_a dT$$

und entsprechend für die Thomsonwärme im Metalle B

$$\sigma_b dT = dE_b'' - r_b dT,$$

also für die Differenz der beiden Thomsonwärmen in den Metallen A und B

$$(\sigma_a - \sigma_b)dT = dE'' - (r_a - r_b)dT.$$

Der erste Hauptsatz, angewandt auf diese metallische Thermokette, verlangt, daß die thermoelektrische Kraft gleich sei der Summe aller Peltier- und Thomsonwärmen, d. h. es muß sein

$$dE = d\Pi + (\sigma_a - \sigma_b)dT.$$

Setzen wir den aus unserem Ausdruck für die Peltierwärme Π abgeleiteten Ausdruck für $d\Pi$ und ebenso den für die Differenz der Thomsonwärme $(\sigma_a - \sigma_b)dT$ ein, so folgt

$$dE = dE' + \frac{d(q_{a2} - q_{b2})}{dT}dT + dE'' - (r_a - r_b)dT.$$

Nun ist, wie ja ohne weiteres verständlich, der Temperaturkoeffizient der Differenz der Übergangswärmen gleich der Differenz der spezifischen Wärme der freien Elektronen im Metalle A und B, also

$$\frac{d(q_{a2} - q_{b2})}{dT} = r_a - r_b.$$

Setzen wir dies in die Gleichung für dE ein, so ergibt sich

$$dE = dE' + dE'',$$

wie es ja sein muß.

Wir sehen also noch, daß das Temperaturdifferential des nichtelektrischen Anteils der Peltierwärmen gleich dem nichtelektrischen Anteil der Thomsonwärme ist.

Die Frage nach dem Sitz der Potentialdifferenzen im thermoelektrischen Kreise und nach dem Zusammenhange dieser Potentialdifferenzen mit den thermoelektrischen Wärmetönungen dürfte damit in klarer und einfacher Weise gelöst sein.

Aus diesen Gleichungen können wir noch folgendes entnehmen. Die Potentialdifferenzen im Temperaturgefälle sind nur dann gleich Null, falls die gesamte Dissoziationswärme, z. B. im Metalle A q_{a1}, die sich aus der sogenannten inneren Dissoziationswärme q_{a1} und der äußeren Arbeit RT zusammensetzt, gleich Null ist; denn dann ist der osmotische Druck der Elek-

tronen im Metall von der Temperatur unabhängig. Wenn dagegen nur die Konzentration der freien Elektronen von der Temperatur unabhängig ist, was zutrifft, falls die innere Dissoziationswärme q_{a1} verschwindet, so bleibt noch die Potentialdifferenz

$$\frac{dE_a''}{dT} = \frac{RT}{T} = R$$

übrig, die in diesem Falle natürlich unabhängig von der Natur des Metalles ist, so daß die Differenz dieser Werte in zwei Metallen sich aufhebt. Dasselbe Resultat geben ja für diesen Fall auch die kinetischen Elektronentheorien der Thermoelektrizität.

Wenn in einem Metalle, wie z. B. im Blei, kein Thomsoneffekt auftritt, so wird das im allgemeinen keineswegs bedeuten, daß in diesem Metall keine Potentialdifferenz im Temperaturgefälle vorhanden ist, sondern es folgt daraus nur, daß der elektrische Anteil der Thomsonwärme, welcher durch diese Potentialdifferenz bedingt ist, gleich dem nichtelektrischen Anteil mit negativem Vorzeichen ist, also

$$\sigma_a dT = dE_a'' - r_a dT = O,$$

also

$$dE_a'' = r_a dT$$

oder

$$\frac{dE_a''}{dT} = r_a,$$

Ebensowenig bedeutet ein Nullwerden der Peltierwärme bei einer bestimmten Temperatur, daß hier keine Potentialdifferenz in der Berührungsstelle der beiden Metalle mehr vorhanden ist, sondern es folgt aus

$$\Pi = E' + (q_{a2} - q_{b2}) = O$$

nur, daß

$$E' = -(q_{a2} - q_{b2}).$$

Ziehen wir zum Vergleich kurz die älteren Theorien heran, so ist ein solcher Vergleich am leichtesten möglich bei der thermodynamischen Theorie von H. A. Lorentz[1]), in der zum erstenmal mit großer Klarheit die eigentliche spezifische Wärme der Elektrizität, obgleich damals von einer Elektronentheorie noch keine Rede war, eingeführt und mit den Wärmeentwicklungen im thermoelektrischen Kreise in Beziehung gesetzt wurde. Die Größe

$$\left(\frac{\partial U}{\partial e}\right)_a$$

bei Lorentz entspricht unserem q_{a2}, ebenso

$$\left(\frac{\partial U}{\partial e}\right)_b$$

dem q_{b2}; die Bedeutung dieser Größen ist genau dieselbe. Von Planck[2]) wird dieser Begriff mit u_a bezeichnet. Der Temperaturkoeffizient hiervon bedeutet also die wahre spezifische Wärme der Elektrizität oder in unserem Sinne der freien Elektronen, also

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial U'}{\partial e}\right)_a = \frac{\partial u_a}{\partial T} = \frac{\partial q_a}{\partial T} = r_a.$$

Ferner entsprechen die Größen k_a und k_b bei Lorentz[1]) unseren Dissoziationswärmen q_{a1} und q_{b1}, also ist $k_a = q_{a1}$ und $k_b = q_{b1}$.

Während aber die Wärmetönungen k_a und k_b nur eine recht unbestimmte und physikalisch wenig durchsichtige Bedeutung haben, lassen sich die Größen q_{a1} und q_{b1} auf Grund der Elektronentheorie der Metalle, wie wir sahen, in einfacher und anschaulicher Weise deuten.

Auf einen Vergleich mit den kinetischen Elektronentheorien von Riecke, Drude, H. A. Lorentz, Gans, Gruner und der neuesten von Debye[2]), welche ebenfalls die Elektronenaussendung aus heißen Metallen mit heranzieht, soll an dieser Stelle nicht eingegangen werden, da die kinetischen Elektronentheorien gerade in der Hinsicht auf die thermoelektrischen Erscheinungen nicht sehr befriedigend sind. Der großen Schwierigkeit, der sich diese Theorien hier gegenüber sehen, ist ja, wie das auch Debye betont, die, eine Annahme über die molekularen Kräfte zwischen den Elektronen und den ponderablen Atomen der Metalle, sowie über die Temperaturkoeffizienten dieser Kräfte zu machen. Das kann aber bei dem gegenwärtigen Stande unserer Kenntnisse auf diesem Gebiete nur mit mehr oder weniger Willkür geschehen. Der große Vorteil thermodynamischer Ableitungen zeigt sich gerade hier, indem sie jene molekularen Kräfte und ihre Temperaturkoeffizienten in einfacher und bestimmter Weise durch die Wärmetönungen und die spezifischen Wärmen, also physikalisch klar definierte Größen, auszudrücken gestatten, ohne daß ein näheres Eingehen auf den Molekularmechanismus notwendig wäre.

Während nun nach dem Obigen der Zusammenhang der Potentialdifferenzen im thermoelektrischen Kreise mit den Wärmetönungen und spezifischen Wärmen und die Zerlegung der gesamten thermoelektrischen Kraft in ihre Einzelteile leicht zu durchschauen ist, steht es mit der experimentellen Prüfung dieser Beziehungen an reinen Metallen weniger günstig. Einer direkten Messung zugänglich sind bisher nur die thermoelektrische Kraft des geschlossenen Kreises, die Peltierwärme, die Thomsonwärme und deren Temperaturkoeffizienten. Um aber die gesamte thermoelektrische Kraft dE in ihre Einzelteile dE' und dE'' zerlegen zu können, brauchen wir die Kenntnisse der Potentialdiffe-

1) l. c.
2) Wied. Ann. **38**, 624, 1889.

1) l. c.
2) Ann. d. Phys. (4), **33**, 441, 1910.

renz in der Berührungsstelle der beiden Metalle, welche durch die Dampfspannungen gegeben ist, ferner der Differenz der Verdampfungswärmen

$$(q_{a1} - q_{b1}) + (q_{a2} - q_{b2})$$

und schließlich der Differenz der Dissoziationswärmen $(q_{a1} - q_{b1})$. Für ihre Bestimmungen reichen aber thermoelektrische Messungen allein nicht aus.

Für höhere Temperaturen können nur die Messungen über die Aussendung von Elektronen aus heißen Metallen, um deren Erforschung sich Richardson[1]) große Verdienste erworben hat, ergänzend hinzugezogen werden. Sie ergeben zunächst das Verhältnis der Dampfspannungen zweier Metalle bei einer solchen hohen Temperatur und lassen daher für diese die Potentialdifferenz

$$E' = RT \ln \frac{P_a}{P_b}$$

berechnen. Der Temperaturanstieg der Elektronenemission ergibt ferner die Verdampfungswärmen

$$(q_{a1} + q_{a2}) \text{ und } (q_{b1} + q_{b2}),$$

so daß auch dE' berechenbar ist. Die Peltierwärme Π kann hieraus jedoch noch nicht berechnet werden, denn dazu ist noch die Kenntnis der Differenz $(q_{a2} - q_{b2})$ erforderlich, welche hier aus der Differenz der Verdampfungswärmen durch Subtraktion der Differenz der Dissoziationswärmen erhalten wird. Diese letzteren bekommen wir aber aus derartigen Messungen nicht. Hier kann jedoch die Theorie des Temperaturkoeffizienten der metallischen Leitfähigkeit von Koenigsberger[2]) ergänzend eingreifen, der eine Formel für diesen Koeffizienten aufgestellt hat, welche der mit steigender Temperatur zunehmenden Dissoziation der Elektronen Rechnung trägt. Mittels dieser Formel hat Koenigsberger die Dissoziationswärmen $(q_{a1}$ und $q_{b1})$ (innere Dissoziationswärmen) berechnen können. Sollten solche Messungen mit denen von Richardson kombiniert werden, so müssen sie natürlich bei derselben Temperatur vorgenommen werden, was wohl bisher nicht der Fall ist. Dann aber würde sich, wie leicht ersichtlich, die Peltierwärme Π berechnen und mit der Beobachtung vergleichen lassen. Damit wäre dann auch die Zerlegung der gesamten thermoelektrischen Kraft dE in ihre Bestandteile dE' und dE'' möglich. Eine direkte Messung der Potentialdifferenz dE_a'' im Temperaturgefälle, z. B. des Metalles A, ist leider nicht ausführbar. Denn die Messung der Potentialdifferenz zwischen dem warmen und kalten Ende, z. B. eines Metalles A, die, wenn auch noch nicht vorgenommen, doch wohl ausführbar wäre, ergibt keineswegs nur die Potentialdifferenz dE_a'' im Temperaturgefälle, sondern vielmehr die Summe der drei Potentialdifferenzen in der warmen Grenzfläche des Metalles A, in der kalten Grenzfläche des Metalles A gegen das Vakuum und der Potentialdifferenz dE_a'' im Temperaturgefälle. Die gesamte thermoelektrische Kraft, bestehend aus diesen drei Einzelwerten, hängt hier von der Elektronenkonzentration im Vakuum ab, da die Potentialdifferenzen der Grenzfläche bei der Temperatur B den Weg hat

$$E_a' = RT \ln \frac{P_a}{p}.$$

Ganz ebenso wie oben findet man leicht für die Differenz der Potentialsprünge in der warmen und kalten Grenzfläche

$$dE_a' = (E_a' + [q_{a1} + q_{a2}] - RT) \frac{dT}{T}.$$

Die Summe der drei Potentialdifferenzen ist also

$$dE_a = dE_a' + dE_a'' = \frac{E_a' + q_{a2}}{T} = \frac{\Pi_a}{T},$$

worin Π_a die Peltierwärme dieser Kombination bedeutet. Wir können sie ja auffassen als ein gewöhnliches Thermoelement, bei dem nur ein Metall durch das mit Elektronen von der Konzentration c erfüllte Vakuum ersetzt ist.

Dagegen können wir zur Bestimmung der einzelnen Potentialdifferenzen und Wärmetönungen noch eine von Herrn K. Baedeker[1]) abgeleitete Gleichung für einen offenen thermoelektrischen Kreis, wie ihn ohne Zugrundelegung der Elektronentheorie in ganz ähnlicher Weise zuerst H. A. Lorentz[2]) herangezogen hat, benutzen. Herr Baedeker geht bei seinen Rechnungen von ganz derselben Grundlage aus, die ich meinen Betrachtungen zugrunde gelegt habe, die Verfolgung des Grundgedankens ist dagegen bei Herrn Baedeker eine wesentlich andere. Herr Baedeker berechnet mittels des Elektronendampfdruckes die thermoelektrische Kraft seiner Anordnung, bei der sich je ein Stück der Metalle A und B einerseits auf der Temperatur $T + dT$, andererseits auf der Temperatur T befindet. Die Metalle selbst befinden sich also auf konstanter Temperatur, das Temperaturgefälle ist ganz in den mit Elektronen erfüllt gedachten Raum hinein verlegt. Die folgende Fig. 2 gibt diese Anordnung wieder. Für die thermoelektrische Kraft dieser Anordnung findet Herr Baedeker in einfacher Weise den Ausdruck

$$\frac{dE}{dT} = R \ln \frac{P_a}{P_b}.$$

Da, wie oben gezeigt,

$$R \ln \frac{P_a}{P_b} = \frac{E'}{T},$$

1) Siehe das zusammenfassende Referat im Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik **1**, 300—315, 1904.

2) Siehe das zusammenfassende Referat im Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik **4**, 158, 1907.

1) Diese Zeitschrift **11**, 809, 1910.

2) Archiv. Néerland. **20**, 129, 1885.

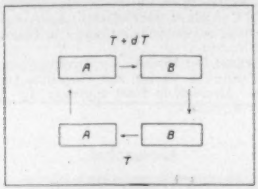

Fig. 2.

so kann man dies auch umformen in

$$\frac{dE}{dT} = \frac{E'}{T}.$$

Dieser Ausdruck gibt ganz richtig die thermoelektrische Kraft dieser speziellen Anordnung wieder. Wenn ihn aber Herr Baedeker in seiner vorläufigen Mitteilung auch als den Ausdruck für die thermoelektrische Kraft des gewöhnlichen, geschlossenen thermoelektrischen Kreises ansieht, so ist das wenigstens allgemein nicht richtig, wie sich leicht zeigen läßt. Vergleichen wir die Form von Herrn Baedeker mit der Grundgleichung von W. Thomson, die als ohne spezielle Annahmen abgeleitet allgemein gültig ist, also mit der Gleichung

$$\frac{dE}{dT} = \frac{\Pi}{T},$$

so sehen wir, daß bei einer Identifizierung der beiden Gleichungen die Peltierwärme Π gleich der Potentialdifferenz E'' in der Grenzfläche beider Metalle sein würde, wie das ja auch Herr Baedeker ohne weitere Ableitung annimmt. Die Peltierwärme wäre also rein elektrischer Natur. Dann wäre aus ihr also die Potentialdifferenz in der Berührungsstelle der beiden Metalle direkt zu berechnen, wie das früher ja auch wohl schon geschehen ist, ein Verfahren jedoch, auf dessen Unzulässigkeit schon wiederholt z. B. auch von Planck[1]) hingewiesen ist und das ja auch mit der thermodynamischen Theorie von H. A. Lorentz[2]) nicht zu vereinigen ist. Ferner wäre nach Herrn Baedeker der nichtelektrische Anteil der Thomsonwärme für alle Metalle gleich $R\,dT$, die Differenz $\sigma_a - \sigma_b$ der Thomsonwärme zweier Metalle also rein elektrischer Natur. Diese Resultate leitet Herr Baedeker nicht als exakte Konsequenzen seiner Grundannahmen ab, sondern nimmt sie ohne weitere Begründung an. Wie leicht ersichtlich, sind diese Annahmen von Herrn Baedeker identisch mit dem Nullsetzen der Differenz $q_{a_2} - q_{b_2}$, welche den nichtelektrischen Anteil der Peltierwärme bildet, und ferner mit dem Gleichsetzen der Differentialquotienten dieser Größen nach der Temperatur

$$\frac{dq_{a_2}}{dT} = \frac{dq_{b_2}}{dT}$$

d. h. der spezifischen Wärmen der freien Elektronen in den Metallen. Das bedeutet ferner, daß die Verdampfungswärmen mit den Dissoziationswärmen identifiziert werden, was molekulartheoretisch bedeuten würde, daß der Verteilungskoeffizient der Elektronen zwischen Metall und Vakuum gleich 1 ist, oder daß keine molekularen Anziehungskräfte beim Übergang der Elektronen aus einem Metall in ein anderes oder in das Vakuum zu überwinden wären. Man müßte dann erwarten, daß wenigstens unmittelbar an der Oberfläche der Metalle dieselbe Konzentration der Elektronen vorhanden wäre, wie im Metall selbst, also auch dieselbe oder eine größere Leitfähigkeit, was aber bekanntlich nicht der Fall ist. Im Blei, das keinen Thomsoneffekt zeigt, wäre dann also auch keine Potentialdifferenz im Temperaturgefälle vorhanden, ein Schluß, den ebenfalls schon Planck als unzulässig hingestellt hat. Die Annahme der Gleichheit der spezifischen Wärme der freien Elektronen in allen Metallen ist also durch nichts gerechtfertigt, sie bedeutet eine Vernachlässigung, die allenfalls bei einer kinetischen Theorie in erster Annäherung gemacht werden darf, die aber für eine konsequente thermodynamische Theorie nicht zulässig erschien; den Vorteil der letzteren vor einer kinetischen Theorie würde man damit wieder preisgeben.

Wie oben gezeigt ist, ergeben sich die hier entwickelten Deutungen, vor allem der Peltier- und Thomsonwärme, ohne weitere Annahme als direkte Konsequenzen der Grundannahme bei Heranziehung der Gleichung von Clausius-Clapeyron, welche die Dampfspannung mit der Verdampfungswärme in Beziehung setzt, welch letztere wieder durch das Energieprinzip mit der spezifischen Wärme in Beziehung steht. Um die Verhältnisse im Temperaturgefälle der Metalle zu klären, kommt man aber, wie oben gezeigt, mit dem Begriff des Elektronendampfdruckes allein nicht aus, sondern muß noch die Elektronenkonzentration oder den osmotischen Druck der Elektronen in die Rechnung einführen.

Für die von ihm betrachtete Anordnung des offenen Thermokreises gibt jedoch die Formel von Herrn Baedeker den richtigen Wert der thermoelektrischen Kraft. Der Unterschied der thermoelektrischen Kraft dieser Kombination gegenüber derjenigen einer geschlossenen Thermokette, welcher also $(q_{a_2} - q_{b_2})$ beträgt, ist theoretisch leicht zu verstehen. Bei der Anordnung des Herrn Baedeker heben sich beim

1) Wied. Ann. **38**, 624, 1889.
2) Wied. Ann. **38**, 593, 1889.

Fließen des Stromes oder der Elektronen die Übergangswärmen q_{a2} und q_{b2} an der Eintrittsstelle und der Austrittsstelle der Metalle A und B bei der Temperatur T jedesmal auf, und ebenso die entsprechenden Wärmetönungen bei der Temperatur $T + dT$. Beim Fließen des elektrischen Stromes in dieser Anordnung wird also eine Wärmemenge von der höheren auf die tiefere Temperatur gebracht, die um diesen Betrag $(q_{a2} - q_{b2})$ kleiner ist, als die bei der geschlossenen Thermokette, und dem entspricht die Differenz dieser beiden thermoelektrischen Kreise

$$dE - dE = (q_{a2} - q_{b2})\frac{dT}{T}.$$

Gelänge es also, was wohl möglich erscheint, die thermoelektrische Kraft in der Anordnung von Herrn Baedeker zu messen, so würde ihre Differenz gegenüber der Thermokraft der geschlossenen Kette die Differenz $(q_{a2} - q_{b2})$ zu berechnen gestatten.

Eine direkte Prüfung der oben abgeleiteten Beziehungen, welche die logischen und anschaulichen Folgerungen aus der Grundannahme darstellen, muß wenigstens für reine Metalle erst von der Zukunft erwartet werden. Eine Anwendung auf die Thermoelektrizität und Leitfähigkeit von Legierungen soll in einer weiteren Mitteilung gegeben werden.

Danzig-Langfuhr, den 26. März 1911.

(Eingegangen 26. März 1911.)

Tagesereignisse.

Die **Society of Dyers and Colourists** hielt ihre Jahresversammlung am 30. März in Bradford ab. Zum Präsidenten wurde Sir Fred. Cawley, zu Vizepräsidenten W. H. Pennington, Geo. Douglas und Dr. Knecht, zum Ehrensekretär Denison gewählt. Die Perkin-Medaille wurde Prof. Adolf von Baeyer in München für seine Indigosynthese (1878) zugesprochen.

Die **Société chimique de France** hält ihre Jahresversammlung am 2. und 3. Juni in Paris ab. Prof. Holleman-Utrecht wird einen Vortrag über „Die Regeln bei der Substitution im Benzolring" halten.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: Für Mathematik (mit sofortigem Lehrauftrag) an der Universität Greifswald der bisherige Privatdozent an der Universität Bonn Dr. Wilhelm Blaschke.

Ernannt: Der Nahrungsmittelchemiker Dr. Alfred Schaeffer in Liegnitz zum Direktor des analytischen Staatslaboratoriums für Nahrungsmittel- und gerichtliche Chemie des Staates Minas-Geraes in Bello Horizonte, H. T. Beans und F. J. Metzger zu Assistant-Professoren der Chemie an der Columbia University New York, der Privatdozent an der Universität München Dr. Peter Debye zum a. o. Professor der theoretischen Physik an der Universität Zürich, am Smith College in Northampton Harriet E. Biegelow zum Professor der Astronomie, an der Yale University in New Haven Dr. Carl Johns zum Assistent-Professor der Chemie.

In den Ruhestand: Der Professor der Chemie am College of Pharmacy der Columbia-Universität in New York Dr. Virgil Coblentz (für Ende des Jahres), der Professor der Mathematik am Dartmouth College in Hanover Frank Asbury Sherman.

Gestorben: Der Direktor der Privatsternwarte in Louvain Dr. François Terby, der ehemalige Direktor der Technischen Hochschule Delft Professor der Physik Dr. Johannes Bosscha.

Gesuche.

Gesucht zum sofortigen Eintritt

Physiker

mit abgeschlossener Hochschul- oder Universitätsbildung für das Laboratorium einer Großfirma Berlins. Herren, welche an die selbständige Durchführung technisch-wissenschaftlicher Untersuchungen und Messungen (besonders photometrischer Messungen) gewöhnt und auch zu techn.-wissenschaftl. literarischen Arbeiten befähigt sind, wollen Angebote mit Lebenslauf, Angabe der Gehaltsansprüche und Eintrittszeit einreichen a. d. Exped. ds. Zeitschr. unter **S. H. 345.**

Für das Physikalische Institut der **Technischen Hochschule** in **Darmstadt** wird zum 1. Mai d. J. ein

Assistent

gesucht. Bewerbungen sind zu richten an

Prof. Dr. **K. Schering,**
Darmstadt, Hochschulstraße 2.

Dipl.-Ing. Dr. phil.

sucht als **Elektrophysiker** Stellung. Offerten sind zu senden unter **S. H. 344** an die Expedition dieser Zeitschrift.

Promovierter Physiker,

z. Z. Hochschulassistent, **sucht** Stellung als Assistent an einem physikalischen Institut oder als Laboratoriumsphysiker in staatlichem oder privatem industriellen Betriebe. Offerten erbeten unter **K. M. 185** an den Verlag dieser Zeitschr.

Für die Redaktion verantwortlich Professor Dr. Friedrich Krüger in Danzig-Langfuhr. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Fig. 3.

Fig. 4.

OBERLIN
COLLEGE
LIBRARY